ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°07

Exercice 1 (*)

Nature de la série de terme général :

1. $\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}}$
2. $\ln(\operatorname{th}(n))$
3. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

Exercice 2 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{(n+2)!}$
2. $\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3}$
3. $\dfrac{\ln(n)^n}{n!}$

Exercice 3 (*)

Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ en fonction du paramètre $\beta\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$
2. $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$
3. $\sin\left(\pi(2+\sqrt{5})^n\right)$

Exercice 5 (*)

Soit $\alpha>0$. Nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}$
2. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$
3. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

Exercice 6 (*)

Montrer la convergence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}(t-\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 (**)

Soit $f\in\mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (**)

1. Montrer $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \text{Arctan}\,(x) - \text{Arctan}\,(y) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

2. Convergence puis somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \text{Arctan}\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$

Exercice 9 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$

Exercice 10 (**)

Nature des séries de terme général :

1. $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\text{Arctan}\,(k)}{k\sqrt{k}}$

2. $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}}$

3. $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k\ln(k)^3}$

Exercice 11 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 > 2 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.