ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°08

Exercice 1 (***)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(2\pi n!\mathrm{e})$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$

Exercice 2 (***)

Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor}\right) \mathrm{d}t$ est bien définie puis la calculer.

Exercice 3 (***)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$
3. $\displaystyle\sum \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 4 (***)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.

1. Si $\alpha > 1$, choisir $\beta \in \,]\,1\,;\alpha\,[$, comparer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Compléter l'étude pour $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

Exercice 5 (**)

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $\mathrm{A}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ pour n entier avec $\mathrm{A}_0 = 0$ pour convention.

1. Montrer $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{A}_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k (b_{k+1} - b_k)$$
2. Application : pour θ réel, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 6 (**)

Soit $(u_n)_n$ suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 7 (**)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$
2. $\sin(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n})$

Exercice 8 (***)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour n entier. Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 10 (****)

Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.