ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°09

Exercice 1 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle non nulle. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ pour n entier. On suppose

$$a_n \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Montrer
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$$

Indications : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$ puis considérer $\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3$ pour n entier non nul et utiliser une sommation de relation de comparaison.

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \to +\infty$.

Indications : Montrer que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -1$ pour x suffisamment grand puis intégrer l'inégalité. Pour le reste d'ordre n, s'inspirer de la démarche précédente en justifiant que pour $c > 0$, on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -c$ pour x suffisamment grand et en intégrant sur $[\![\, n+1\,;\, n+k+1\,]\!]$ avec n assez grand.

Exercice 3 (****)

Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Indications : Poser

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor$$

puis considérer
$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin\left(\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}$$

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Indications : Pour p entier non nul, poser $\mathrm{U}_p = \mathrm{S}_{p^2-1}$ et considérer $\sum\limits_{p\geqslant 1} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p]$.

Exercice 5 (****)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Indications : Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $(a_k b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ avec $(b_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$$

Exercice 6 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Indications : Comparer $\operatorname{Arctan}(x)$ et x pour $x \geqslant 0$.

Exercice 7 (***)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on pose

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(p) = \min \{ n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{H}_n \geqslant p \}$$

1. Justifier que φ est bien définie.
2. Déterminer un développement asymptotique de H_n à deux termes pour $n \to +\infty$.
3. En déduire un équivalent simple de $\varphi(p)$ pour $p \to +\infty$ et le comportement asymptotique de la suite $\left(\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)} \right)_{p \geqslant 1}$.

Indications : 1. Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{H}_n$.
2. Utiliser le théorème de comparaison série/intégrale.
3. Pour n entier non nul, majorer H_n par comparaison série/intégrale puis pour p entier non nul, minorer $\mathrm{H}_{\varphi(p)}$ et majorer $\mathrm{H}_{\varphi(p)-1}$ par définition de $\varphi(p)$. Justifier que $\varphi(p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$ et utiliser le développement asymptotique précédemment établi.