Corrigé du devoir surveillé n°1 - 4h

Partie I

1.(a) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, on a $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et on en déduit la continuité de g sur $\mathbb{R}$. Par dérivation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad g'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

Avec les développements usuels, on trouve

$$g'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t(1+\mathrm{o}(t)) - t + \mathrm{o}(t^2)}{t^2} = \mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$, on conclut

$$\boxed{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

1.(b).i Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto 1-\cos t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to 0}{=} \frac{1-1+\mathrm{o}(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{O}(1)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Le crochet $\left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}$ étant fini, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Soit $f : t > 0 \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1-1+t^2/2+\mathrm{o}(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

1.(b).ii Soit j entier non nul. Avec le changement de variables $u = jt$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

1.(c) On a $\qquad \ln\left(\dfrac{\sin t}{t}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{t^2}{3!} + \dfrac{t^4}{5!} + \mathrm{o}(t^4)\right) = -\dfrac{t^2}{3!} + \dfrac{t^4}{5!} - \dfrac{1}{2}\dfrac{t^4}{(3!)^2} + \mathrm{o}(t^4)$

D'où

$$\boxed{\ln g(t) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + \mathrm{o}(t^4)}$$

1.(d) Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $u = \sqrt{\dfrac{n}{3}}t$, il vient

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u$$

Or, on a $$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit $$\boxed{\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}} \,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$$

2.(a) Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^n t}{t^n}$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^n}{t^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

On en déduit l'intégrabilité de la fonction sur $]\,0\,;1\,]$ puisqu'elle prolongeable par continuité en 0 et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} \,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2.(b) D'après l'intégration par parties effectuée à la question 1.(b).i, on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

Par trigonométrie, on a $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variables $u = \dfrac{t}{2}$, les intégrales $2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

3.(a) Soit n entier non nul et $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_n(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^n = \frac{1}{(2\mathrm{i})^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^{n-\ell} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(2\ell-n)t}$$

La fonction h_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_n^{(k)}(t) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^{n-\ell} (2\ell-n)^k (\mathrm{i})^k \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(2\ell-n)t}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} |2\ell - n|^k$$

Ce qui prouve

$$\boxed{\text{Pour } k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!], \text{ il existe } \mathrm{K} > 0 \text{ tel que, pour } t \text{ réel, on a } \left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant \mathrm{K}.}$$

Remarque : Le sujet indique pour $t>0$ dans la définition de h_n puis considère la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui ne pose pas de problème de toute façon.

Variante : On aurait aussi justifier que $h_n^{(k)}$ est 2π-périodique comme dérivée d'une telle fonction, continue donc bornée sur une période et par conséquent bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

3.(b).i Soit n entier non nul. On a

$$h_n(t) \underset{t\to 0}{=} (t+\mathrm{o}(t))^n = (t(1+\mathrm{o}(1))^n = t^n(1+\mathrm{o}(1))^n \quad \text{avec} \quad (1+\mathrm{o}(1))^n \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

D'où $$\boxed{h_n(t) = t^n + \mathrm{o}(t^n)}$$

3.(b).ii Soit n entier non nul. La fonction h_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Taylor-Young

$$h_n(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h_n^{(k)}(0)}{k!} t^k + \mathrm{o}(t^n)$$

d'où par unicité du développement limité

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \qquad h_n^{(k)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad h_n^{(n)}(0) = n!$$

Ainsi, pour $k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!]$, on a

$$h_n^{(k)}(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{h_n^{(k+j)}(0)}{j!} t^j + \mathrm{o}(t^{n-k}) \underset{t\to 0}{=} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} + \mathrm{o}(t^{n-k})$$

D'où $$\boxed{\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{n!}{(n-k)!}}$$

3.(c) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![\, 0\,;\, n-2 \,]\!]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$, prolongeable par continuité en 0 et, d'après la majoration établie à la question 3.(a)

$$\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{n-k}}\right)$$

La fonction est donc intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ (faussement impropre) et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2 \text{ et } k \in [\![\, 0\,;\, n-2 \,]\!], \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\, \mathrm{d}t \text{ converge absolument.}}$$

3.(d) Soit $n \geqslant 2$. Les fonctions $t \mapsto h_n^{(n-2)}(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. D'après le résultat de la question 3.(b).ii, on a $h_n^{(n-2)}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{n!}{2} t^2$ et d'après le résultat de la question 3.(a), on a $h_n^{(n-2)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$. Ainsi

$$\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!}{2} t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

sont de même nature. La fonction $t \mapsto \dfrac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis

$$\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{n!}{2} \quad \text{et} \quad \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On en déduit son intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$ car prolongeable par continuité en 0 et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

L'intégration par parties mise en œuvre donne l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec des intégrations par parties successives, on peut conjecturer que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. On a clairement $\mathscr{P}(0)$ vraie. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k \in [\![\,0\,;\,n-2\,]\!]$. Ceci suppose l'intégrale à droite dans l'égalité convergente. Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{(n-k-1)t^{n-k-1}}$ et $h_n^{(k)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!(n-k-1)}\frac{t^{n-k}}{t^{n-k-1}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

et
$$-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{n-k-1}}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, le crochet $\left[-\dfrac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}}\right]_0^{+\infty}$ est fini, nul et on a

$$\begin{aligned}\frac{(n-1-k)!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t &= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!}\,\frac{1}{n-k-1}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(n-1-(k+1))!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-(k+1)}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Avec $k = n-1$, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

4.(a) Soit n entier non nul. Pour t réel, on a

$$h_{2n}(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^{2n} = \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-k)t} = \frac{1}{4^n(-1)^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}$$

En observant $(-1)^n = (-1)^{-n}$, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_{2n}(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}}$$

4.(b) Soit n entier non nul. Par dérivation, on a pour t réel

$$\begin{aligned} h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}(2n-2k)^{2n-1}(\mathrm{i})^{2n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}(n-k)^{2n-1}(-1)^n(-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t} \end{aligned}$$

Comme la fonction $h_{2n}^{(2n-1)}$ est réelle, il vient en prenant la partie réelle dans le membre de gauche

$$h_{2n}(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k(n-k)^{2n-1}\sin(2(n-k)t)$$

On observe que le terme en $k=n$ est nul et on sépare cette somme en deux : pour $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ et pour $k \in [\![n+1\,;\,2n]\!]$. Dans la première somme, on fait le changement d'indice $\ell = n-k$ et dans la deuxième $\ell = k-n$. On obtient

$$2h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{2n}{n-\ell}(-1)^{n-\ell}\ell^{2n-1}\sin(2\ell t) + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{2n}{\ell+n}(-1)^{n+\ell}(-\ell)^{2n-1}\sin(-2\ell t)$$

On observe $\quad \forall \ell \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \binom{2n}{n-\ell} = \binom{2n}{2n-(n-\ell)} = \binom{2n}{n+\ell} \qquad (-1)^{n-\ell} = (-1)^{n+\ell}$

et avec l'imparité du sin, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}\sin(2\ell t)}$$

4.(c) Par linéarité de l'intégrale, toutes les intégrales concernées étant convergentes d'après le résutlat de la question 1.(b).ii, on a pour n entier non nul

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\mathrm{d}t &= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}\frac{\sin(2\ell t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} &= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2\ell t)}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Et on conclut $\qquad \boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}}$

5.(a) Pour $n \geqslant 2$, on a $\qquad \forall t \geqslant \dfrac{\pi}{2} \qquad 0 \leqslant \dfrac{|\sin t|^n}{t^n} \leqslant \dfrac{1}{t^n}$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n}$ converge, il vient par comparaison et inégalité triangulaire

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{|\sin t|^n}{t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{1}{n-1}$$

On conclut $\qquad \boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

5.(b).i On pose $\qquad \forall t \in \left]\,0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

La fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On trouve

$$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

On pose $$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \psi(t) = t\cos t - \sin t$$

On a ψ dérivable et par dérivation

$$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \psi'(t) = -t\sin t \leqslant 0$$

Comme $\psi(0) = 0$, on en déduit ψ négative et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ décroît.}}$$

5.(b).ii Soit n entier non nul. On note $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées. On choisit n assez grand pour avoir $\varepsilon_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Par décroissance de φ, il vient

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^n(\varepsilon_n)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)\varphi^n(\varepsilon_n)$$

Puis $$\ln \varphi^n(\varepsilon_n) = n\ln g(\varepsilon_n) = -\frac{n\varepsilon_n^2}{6} + \mathrm{o}(n\varepsilon_n^2) = -\frac{(\ln n)^2}{6} + \mathrm{o}((\ln n)^2)$$

d'où $$\sqrt{n}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)}_{=\mathrm{O}(1)}\varphi^n(\varepsilon_n) = \mathrm{O}(1)\exp\underbrace{\left[\frac{\ln n}{2} - \frac{(\ln n)^2}{6} + \mathrm{o}((\ln n)^2)\right]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $$\boxed{\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

5.(c).i La fonction $h : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $|h'(u)| = \mathrm{e}^{-u} \leqslant 1$ pour $u \geqslant 0$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall u \geqslant 0 \qquad |h(u) - h(0)| \leqslant 1\,|u - 0|$$

Autrement dit $$\boxed{\forall u \geqslant 0 \qquad |\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant u}$$

Remarque : La question est étrangement mal posée. N'importe quel $a > 0$ fait l'affaire et on peut faire mieux que l'inégalité exigée en se passant du facteur 2.

5.(c).ii On pose $$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad h(t) = \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6}$$

On a obtenu précédemment

$$h(t) = -\frac{t^4}{180} + \mathrm{o}(t^4) = t^4\underbrace{\left(-\frac{1}{180} + \mathrm{o}(1)\right)}_{\xrightarrow[t\to 0]{}-\frac{1}{180}<0}$$

On en déduit que h est négative au voisinage de 0. Par ailleurs, on a $-\dfrac{t^4}{180} \geqslant -t^3$ au voisinage de zéro puisque $t^4 \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}(t^3)$. Par conséquent, pour un choix de voisinage de zéro suffisamment petit, les deux conditions mentionnées sont réalisées autrement dit

$$\boxed{\text{On dispose de } b>0 \text{ tel que pour } t\in\,]\,0\,;b\,],\text{ on a } -t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)+\frac{t^2}{6}\leqslant 0.}$$

5.(c).iii On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées. On choisit n assez grand pour avoir $\varepsilon_n \in\,]\,0\,;b\,]$ et donc $-t^3 \leqslant h(t) \leqslant 0$ pour $t\in\,]\,0\,;\varepsilon_n\,]$. On obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\varepsilon_n}\left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n - \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\right]\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\left[\mathrm{e}^{nh(t)}-1\right]\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^{\varepsilon_n}\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}}_{\leqslant 1}\left(1-\mathrm{e}^{nh(t)}\right)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\varepsilon_n}\left(1-\mathrm{e}^{-nt^3}\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Avec la majoration de la question 5.(c).i (avec le facteur 2), il vient

$$\boxed{\left|\int_0^{\varepsilon_n}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\varepsilon_n} 2nt^3\,\mathrm{d}t \leqslant 2n(\varepsilon_n)^3\varepsilon_n \leqslant \frac{2(\ln n)^4}{n}}$$

Remarque : Là encore, il est aisé de faire mieux que ce qu'exige le sujet :

$$\left|\int_0^{\varepsilon_n}\left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n - \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\right]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\varepsilon_n} nt^3\,\mathrm{d}t = \frac{n\varepsilon_n^4}{4} = \frac{(\ln n)^4}{4n}$$

5.(c).iv Soit n entier non nul. Par relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\varepsilon_n}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

Par croissances comparées, on a $\dfrac{2(\ln n)^4}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ainsi, d'après les résultats intermédiaires précédemment établis, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et
$$\int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$$

Partie II

1.(a) Soit n entier non nul. La seule configuration possible pour une seule montée dans une liste de S_n est $(1,2,\ldots,n)$ et la seul configuration possible pour n montées est $(n,n-1,\ldots,1)$. En effet, pour une unique montée, si la liste n'est pas strictement croissante alors il y a au moins deux montées ce qui est exclu. De même, pour n montées, si la liste n'est pas strictement décroissante, il y au plus $n-1$ montées ce qui est exclu. On conclut

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{E}_n(1)=1 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_n(n)=1}$$

1.(b) Soit n entier non nul et $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Dans la liste $(k,k-1,\ldots,1,k+1,k+2,\ldots,n)$, on a (k),$(k-1)$, … (2) et $(1,k+1,\ldots,n)$ montées d'où

$$\boxed{\text{La liste } (k,k-1,\ldots,1,k+1,k+2,\ldots,n) \text{ admet } k \text{ montées.}}$$

2. Soit a une liste et s_i la somme du nombre de montées et de descentes de $(a_1,\ldots,a_i)$ pour $i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Pour $i\in[\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$, on a, comptant respectivement les montées et descentes

$$s_{i+1} = \begin{cases} s_i + 0 + 1 & \text{si } a_i < a_{i+1} \\ s_i + 1 + 0 & \text{si } a_i > a_{i+1} \end{cases}$$

On a donc $s_{i+1} = s_i + 1$ et $s_1 = 2$ car sur une liste à un élément, il y a une même montée et descente. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad s_n = s_1 + n - 1 = n + 1}$$

3.(a) L'application Ψ est bien à valeurs dans S_n et on a clairement $\Psi^2 = \mathrm{id}$ ce qui prouve qu'elle est bijective et est son propre inverse.

$$\boxed{\text{L'application } \Psi \text{ est une bijection de } \mathrm{S}_n \text{ dans } \mathrm{S}_n.}$$

3.(b) Soit n entier non nul et $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Une montée $a_p < a_{p+1} < \ldots < a_q$ est transformée, *via* l'application Ψ, en descente $n+1-a_p > \ldots > n+1-a_q$ et de même pour les montées qui seraient des singletons. Ainsi, une liste a avec k montées devient une liste avec k descentes et les $n+1-k$ descentes deviennent $n+1-k$ montées. Par conséquent

$$\{a \in \mathrm{S}_n ; \mathrm{M}(a) = k\} = \{a \in \mathrm{S}_n ; \mathrm{M}(\Psi(a)) = n+1-k\} = \{b \in \mathrm{S}_n ; \mathrm{M}(b) = n+1-k\}$$

en posant $b = \Psi(a)$ comme changement de variable bijectif dans le parcours du dernier ensemble. Considérant les cardinaux, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{E}_n(k) = \mathrm{E}_n(n+1-k)}$$

4.(a) Soit $n \geqslant 2$. Choisir un couple (A, B) de parties non vides disjointes de $[\![1\,;\, n]\!]$, c'est choisir $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ éléments qui vont constituer A et les éléments restants constituent B. Ainsi, le nombre de choix possibles est

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2}$$

4.(b) Une liste $a = (a_1, \ldots, a_n)$ admet deux montées exactement si elle vérifie

$$a_1 < \ldots < a_k \qquad a_k > a_{k+1} \qquad a_{k+1} < \ldots < a_n$$

Ceci équivaut à choisir A et B, parties non vides disjointes de $[\![1\,;\, n]\!]$ avec $\mathrm{A} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ et $\mathrm{B} = \{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ telles que $a_k > a_{k+1}$. Si cette dernière condition n'est pas remplie, alors on a $a_1 < \ldots < a_k < a_{k+1} < \ldots < a_n$ ce qui impose $a_i = i$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Ces configuration, pour $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$, sont donc à exclure et on conclut

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{E}_n(2) = 2^n - 2 - (n-1) = 2^n - (n+1)}$$

5.(a) Soit n entier non nul. Pour $b = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{S}_n$, on a

$$\boxed{\varphi_n^{-1}(\{b\}) = \{(n+1, a_1, \ldots, a_n), (a_1, n+1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, (a_1, \ldots, a_n, n+1)\}}$$

5.(b) Soit $b = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{S}_n$ avec k montées. Si $a = (n+1, a_1, \ldots, a_n)$, alors la liste a admet une montée en plus, à savoir $(n+1)$ et la liste a admet donc $k+1$ montées. Si $a = (a_1, \ldots, a_n, n+1)$, le $n+1$ en dernière position fera partie de la dernière montée existante dans n donc il y a k montées dans a. Pour les autres configurations, on a $a = (a_1, \ldots, a_i, n+1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ et on a $k+1$ montées si $a_i < a_{i+1}$ puisque l'insertion de $n+1$ casse la croissance tandis qu'on aura toujours k montées si $a_i > a_{i+1}$ puisque $n+1$ sera aggloméré à la montée se terminant par a_i. On a donc

$$\boxed{\forall a \in \mathrm{S}_{n+1} \qquad \mathrm{M}(a) = \mathrm{M}(\varphi_n(a)) \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}(a) = \mathrm{M}(\varphi_n(a)) + 1}$$

5.(c) On partitionne

$$\{a \in \mathrm{S}_{n+1} ; \mathrm{M}(a) = k+1\} =$$
$$\{a \in \mathrm{S}_{n+1} ; \mathrm{M}(a) = k+1, \mathrm{M}(\varphi_n(a)) = k\} \sqcup \{a \in \mathrm{S}_{n+1} ; \mathrm{M}(a) = k+1, \mathrm{M}(\varphi_n(a) = k+1\}$$

Dans une liste $a \in \mathrm{S}_{n+1}$ telle que $b = \varphi_n(a)$ admet $k+1$ montées, on peut placer l'élément $n+1$ en fin de chacune des montées de b et seulement là pour préserver le nombre de montées. On a donc $(k+1)$ choix pour chacune de ces listes. Dans une liste $a \in \mathrm{S}_{n+1}$ telle que $b = \varphi_n(a) =$ admet k montées, pour augmenter de une montée, il faut placer $n+1$ hors des positions qui laissent invariants le nombre de montées. Il y a k positions de fin de montées à éviter d'où $n-k$ positions possibles et il faut aussi compter l'insertion de $n+1$ en première position ce qui fait donc $n-k+1$ choix possibles pour chacune de ces listes. Ainsi, passant au cardinal, on conclut

$$\boxed{\mathrm{E}_{n+1}(k+1) = (k+1)\mathrm{E}_n(k+1) + (n+1-k)\mathrm{E}_n(k)}$$

On vérifie sans difficulté que la formule est valide pour $k = 0$ et $k > n$.

6. On procède par récurrence sur n. L'initialisation pour $n = 1$ est vraie. On suppose l'égalité vraie au rang n entier non nul fixé. Soit $k \in [\![1 \,;\, n+1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{n+1}(k+1) &= (k+1)\mathrm{E}_n(k+1) + (n+1-k)\mathrm{E}_n(k) \\
&= (k+1)\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\tbinom{n+1}{k+1-j} j^n + (n+1-k)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\tbinom{n+1}{k-j} j^n \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\left[(k+1)\tbinom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\tbinom{n+1}{k-j}\right] j^n
\end{aligned}$$

On trouve pour $j \in [\![1 \,;\, k+1]\!]$

$$\begin{aligned}
&(k+1)\tbinom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\tbinom{n+1}{k-j} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!}\left[(k+1)(n+1-k+j) - (n+1-k)(k+1-j)\right] \\
&= \frac{(n+2)!}{(k+1-j)!(n+2-(k+1-j)!}j
\end{aligned}$$

et ainsi
$$\mathrm{E}_{n+1}(k+1) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\tbinom{n+2}{k+1-j} j^{n+1}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc établi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \mathrm{E}_n(k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\tbinom{n+1}{k-j} j^n}$$

7. D'après le résultat qui précède, on a pour n entier non nul

$$\mathrm{E}_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\tbinom{2n}{n-j} j^{2n-1}$$

Sans difficulté, on observe $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ et $\binom{2n}{n+j} = \binom{2n}{2n-(n+j)} = \binom{2n}{n-j}$ pour $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$ avec le résultat de la question 4.(c), on conclut

$$\boxed{\mathrm{E}_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\tbinom{2n}{n+j} j^{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t}$$