ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 22/09/25

Préparation à l'interrogation n°03

1 Étude asymptotique

1. Équivalent en 1 de $x^\alpha - 1$;
2. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.

   En effet, on a $$g(x) \underset{x\to a}{=} f(x) + \mathrm{o}(f(x)) = f(x)(1+\mathrm{o}(1))$$

   puis $$\ln(g(x)) = \underbrace{\ln(f(x))}_{\to\infty} + \underbrace{\ln(1+\mathrm{o}(1))}_{\to 0} = \ln(f(x)) + \mathrm{o}(\ln(f(x)))$$

   Le résultat suit.

2 Formules

1. Formule de Taylor reste intégral ;
2. Équivalent de Stirling.

3 Dérivation

Imparité (penser à l'expression conjuguée) et dérivée de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

4 Trigonométrie

1. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

5 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^2} = \tan(t)$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,(t)^2} = \mathrm{th}\,(t)$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$
   si $\alpha \neq 1$

6 Inégalités de convexité/concavité

1. $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t$;
2. $\forall t > -1 \qquad \ln(1+t) \leqslant t$;
3. $\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1+t \leqslant \mathrm{e}^t$;
4. $\forall u \geqslant -1 \qquad (1+u)^\alpha \geqslant 1 + \alpha u$ avec $\alpha \geqslant 1$;
5. $\forall u \geqslant 0 \qquad 1 - u^\alpha \leqslant \alpha(1-u)$ avec $\alpha \geqslant 1$.

7 Exercice type

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ avec a, b réels distincts.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ tel que

$$\mathrm{X}^n = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{Q} + \mathrm{R} \tag{$*$}$$

avec $\deg \mathrm{R} < 2$, autrement dit $\mathrm{R} = \alpha\mathrm{X} + \beta$ avec α, β réels. En substituant X par a puis par b dans $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{a^n - b^n}{a-b} \\ \beta = \dfrac{ab^n - ba^n}{a-b} \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{\text{Si } a \neq b, \text{ on a } \mathrm{R} = \frac{1}{a-b}\left((a^n - b^n)\mathrm{X} + ab^n - ba^n\right)}$$

8 Exercice type

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions $\mathscr{C}^1$), il vient

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1}}$$

2. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q \times (q-1) \times \ldots \times 1}{(p+1) \times (p+2) \times \ldots \times (p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0}$$

avec $$\mathrm{I}_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$$

puis $$\mathrm{I}_{p,q} = \frac{1 \times \ldots \times (p-1) \times p \times q!}{1 \times \ldots \times p \times (p+1) \times \ldots \times (p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\frac{1}{(p+q+1)}$$

D'où $$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}}$$

9 Questions de cours

Convexité, graphes usuels.