

Feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (*)

Établir $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$

Exercice 2 (*)

Établir $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\quad x \leq \tan(x)$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g l'est.

Exercice 4 (*)

Que peut-on dire de la somme deux fonctions convexes ? de leur produit ?

Exercice 5 (*)

1. Une composée de fonctions convexes est-elle convexe ?
2. La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est-elle convexe ?

Exercice 6 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Montrer $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$

Exercice 7 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g convexe. Montrer

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g \circ f$$

Exercice 8 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Montrer $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$

Exercice 9 (*)

Soit $\alpha \geq 1$. Établir $\forall x \geq 0 \quad 1 - x^\alpha \leq \alpha(1 - x)$

Exercice 10 (*)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. Montrer qu'une intersection de parties de E convexes est convexe.

Exercice 11 ()**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ convexe. Montrer

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Exercice 12 ()**

Établir $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{\pi}$

Exercice 13 ()**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe majorée. Montrer que f est constante.

Le résultat subsiste-t-il pour $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$?

Exercice 14 ()**

Soit p entier non nul et $(u_n)_n$ suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série

$\sum \left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}}$ converge.