Feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (**)

Soit $f :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}$, concave, dérivable, croissante.

1. Montrer $\quad \forall x > 1 \qquad f(x+1) - f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) - f(x-1)$
2. On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} f'(k)\right) - f(n) \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} f'(k)\right) - f(n+1)$$
Établir la convergence de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
3. Pour $f(x) = \ln(x)$ avec $x > 0$, déterminer un encadrement de $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ à $\varepsilon > 0$ près.

Exercice 2 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to]\,0\,;+\infty\,[$. Montrer

$$\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \qquad f^{\alpha} \text{ convexe}$$

Exercice 3 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue.

Exercice 4 (***)

Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I.

Exercice 5 (***)

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs.

1. Établir $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.

Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 7 (Hölder, Minkowski ****)

Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, I un intervalle et f, g continues sur I, positives.

1. Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. On suppose f^p et g^q intégrables sur I. Montrer que fg est intégrable sur I et

$$\int_{\mathrm{I}} fg \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{1/q}$$

3. On suppose f^p et g^p intégrables sur I. Montrer que $(f+g)^p$ est intégrable sur I et

$$\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}$$