

Feuille d'exercices n°12

Exercice 1 (***)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexes, positives vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

Montrer que le produit fg est convexe.

Indications : Pour $(x, y) \in I^2$, poser

$$\forall \lambda \in [0; 1] \quad \Delta(\lambda) = \lambda f g(x) + (1 - \lambda) f g(y) - f g(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

puis minorer $\Delta(\lambda)$ en utilisant les hypothèses portant sur f et g .

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour X variable aléatoire, on définit l'entropie de X notée $H(X)$ par

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \ln(\mathbb{P}(X = x))$$

avec pour convention $0 \ln(0) = 0$. Intuitivement, l'entropie correspond à la quantité d'information délivrée par la variable aléatoire X ou encore à l'incertitude (ou désordre) liée aux valeurs prises par X .

1. Montrer $0 \leq H(X) \leq \ln(\text{Card } X(\Omega))$
2. Montrer $H(X) = 0 \iff \exists a \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}(X = a) = 1$
3. Montrer $H(X) = \ln(\text{Card } X(\Omega)) \iff X \sim \mathcal{U}_{X(\Omega)}$

Indications : 1. Montrer $-u \ln(u) \leq 1 - u$ pour $u \geq 0$ puis l'appliquer à $n\mathbb{P}(X = x)$ avec $n = \text{Card } X(\Omega)$.

2. Pour le sens direct, remarquer qu'il s'agit d'une somme de termes positifs.

3. Pour le sens direct, reprendre le calcul effectué à la question 1 en remplaçant l'inégalité par une égalité et utiliser l'inégalité fournie en indication pour la question 1.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. Pour $X \subset E$, on définit l'enveloppe convexe de X par

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{K \text{ convexe } \supset X} K$$

1. Justifier qu'il s'agit du plus petit convexe contenant X .
2. Montrer que l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des combinaisons convexes de X , *i.e.*

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, n \geq 1, (x_i)_{i \in [1; n]} \in X^n, (\alpha_i)_{i \in [1; n]} \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Indications : 2.(b) Pour établir que l'enveloppe convexe contient l'ensemble des combinaisons convexes, utiliser une caractérisation des parties convexes avec des barycentres à coefficients positifs.

Exercice 4 (***)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. L'ensemble des racines de P' est contenu dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Indications : Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ puis évaluer en α racine de P' , multiplier par les conjugués au dénominateur et conjuguer l'expression finale.

Exercice 5 (***)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer

$$0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{8}$$

Indications : Considérer les positions graphe/corde, graphe/tangente sur les intervalles $[0; 1]$, $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Exercice 6 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $g(x) = f(x) - xf'(x)$ admet une limite (finie ou infinie) pour $x \rightarrow +\infty$.
2. On suppose que g admet une limite finie p pour $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m pour $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer alors
$$f(x) - mx - p \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Indications : 1. En supposant f deux fois dérivable, conjecturer la variation de g puis considérer $g(y) - g(x)$ pour $y > x \geq 0$ et exploiter la convexité de f .
2. Considérer les fonctions

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - p}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Déterminer leurs monotonies puis les comparer et conclure sur leur comportement asymptotique.

3. Utiliser la fonction φ et la monotonie de f' .

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n et $X \subset E$. Montrer que tout élément de $\text{Conv}(X)$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $n + 1$ éléments de X .

Indications : Considérer $x \in \text{Conv}(X)$ avec $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ combinaison convexe de p éléments pour $p > n + 1$. Observer que la famille $(x_2 - x_1, \dots, x_p - x_1)$ est liée puis en déduire des scalaires β_i tels que $\sum_{i=1}^p \beta_i x_i = 0$. Faire un choix adapté de t pour que, dans l'écriture $\sum_{i=1}^p (\alpha_i + t\beta_i)x_i$, les β_i soient positifs et l'un d'eux nuls.