

Feuille d'exercices n°01

Exercice 1 (*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

$$3. \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$$

$$5. \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$$

$$2. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$$

$$4. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$$6. \int_0^1 \frac{dt}{\ln(t)}$$

Corrigé : 1. On a $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} > 0$. D'après le critère des équivalents (licite, signe constant au voisinage de 0) et le critère de Riemann, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ diverge et par conséquent

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ diverge.

2. On a $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}} \in \mathcal{C}_{pm}([0; 1], \mathbb{R})$ et $\frac{1}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t^2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$. D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on obtient que

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$ diverge.

3. On a $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}_{pm}([0; 1[, \mathbb{R})$ puis

$$\frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \underset{t \rightarrow 1}{\longrightarrow} 1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable en 0 et 1 (faussement impropre). Ainsi

L'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$ converge.

4. On a $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \in \mathcal{C}_{pm}([0; 1[, \mathbb{R})$ puis

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable en 0 et 1. Ainsi

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge.

5. On a $f : t \mapsto e^{-(t+\frac{1}{t})} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis

$$e^{-(t+\frac{1}{t})} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad e^{-(t+\frac{1}{t})} = \underbrace{e^{-\frac{1}{t}}}_{=O(1)} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 (faussement impropre) et intégrable en $+\infty$ par comparaison et critère de Riemann.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$ converge.

6. On a $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$ et $\frac{1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$. D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut que

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\ln(t)}$ diverge.

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt$	3. $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\ln(t)} dt$	5. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)}$	4. $\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt$	6. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$

Corrigé : 1. On a $f : t \mapsto 1 - \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis

$$1 - \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \quad \text{et} \quad 1 - \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est intégrable sur $]0; 1]$ par comparaison et intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt$ converge.

2. On a $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)} \in \mathcal{C}_{pm}\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ et

$$\frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut que

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)}$ diverge.

3. On a $f : t \mapsto \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$ puis

$$\frac{\sqrt[3]{t}-1}{\ln(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{3} \frac{t-1}{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \frac{1}{3}$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\ln(t)} dt \text{ converge.}}$$

4. On a $f : t \mapsto \ln(1 - e^{-t}) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis

$$\ln(1 - e^{-t}) \underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(1 - 1 + t + o(t)) = \ln(t(1 + o(1))) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et
$$\ln(1 - e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt \text{ converge.}}$$

5. Pour $x \geq e$, on a
$$\int_e^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_e^x = \ln(\ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)} \text{ diverge.}}$$

6. On a $f : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis

$$\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0; 1]$ et intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \text{ converge.}}$$

Exercice 3 (*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2} \qquad 2. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} \qquad 3. \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^4} dt$$

Corrigé : 1. Avec le changement de variables $u = \ln(t)$, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$ est de même

nature que $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ qui converge et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2} \text{ converge et vaut } \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1.}$$

2. On a $t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1} \in \mathcal{C}([2; +\infty[, \mathbb{R})$ et $\frac{1}{t^2 - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de la fonction.

Puis

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{t+1}{(t+1)(t-1)} - \frac{t-1}{(t+1)(t-1)} \right] dt = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right] dt = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \right]_2^\infty$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{\ln(3)}{2}}$$

3. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{1}{2} [\text{Arctan}(t^2)]_0^\infty$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 4 (*)

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^1 \ln(t)^n dt$$

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout n entier.
2. Pour n entier non nul, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} .
3. En déduire une expression de I_n pour tout n entier.

Corrigé : 1. Pour n entier, on note $f_n :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(t)^n$. On a $f_n \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1], \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0; 1]$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, l'intégrale définissant } I_n \text{ converge.}}$$

2. Soit n entier non nul. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ avec

$$t \ln(t)^n \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad t \ln(t)^n \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$$

la première limite s'obtenant par croissances comparées. Le crochet étant fini, les intégrales $\int_0^1 \ln(t)^n dt$ et $\int_0^1 n \ln(t)^{n-1} dt$ sont de même nature donc convergentes et d'après le théorème d'intégration par parties, on a

$$\int_0^1 \ln(t)^n dt = \underbrace{[t \ln(t)^n]_0^1}_{=0} - n \int_0^1 \ln(t)^{n-1} dt$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = -n I_{n-1}}$$

3. Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = (-1)^n n! I_0$$

et on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = (-1)^n n!}$$

Exercice 5 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \qquad 2. \int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{1-t^2+t^4} dt \qquad 3. \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-t} dt$$

Corrigé : 1. On a $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $\frac{1}{(1+t^2)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^4}\right)$. Puis, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt\end{aligned}$$

par linéarité car convergence des intégrales concernées. Pour cette dernière, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ avec

$$-\frac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{t}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{4}$.

Variante : L'intégrande étant continue, on peut aussi utiliser le changement de variables $t = \tan(u) = \varphi(u)$ avec $\varphi :]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow]0; +\infty[$, $u \mapsto \tan(u)$ bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan(u)^2}{(1+\tan^2 u)^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du$$

sont de même nature donc convergentes et égales. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2} du = \frac{\pi}{4}$$

2. Posons $f(t) = \frac{1-t^2}{1-t^2+t^4}$ pour $t \geq 0$. Le dénominateur de f est un polynôme du deuxième degré en t^2 . Son discriminant est négatif donc le dénominateur ne s'annule pas. Par conséquent, on a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison et critère de Riemann.

Notant $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ $u \mapsto \frac{1}{u}$ bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{1-t^2+t^4} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-1/u^2}{1-1/u^2+1/u^4} \frac{du}{u^2}$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{1-t^2+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^2-1}{u^4-u^2+1} du$$

On conclut

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{1-t^2+t^4} dt$ converge et est nulle.

3. On a $f : t \mapsto e^{-(1-i)t} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{C})$ avec

$$|f(t)| = e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} dt$ converge absolument et par conséquent $\int_0^{+\infty} \operatorname{Re} e^{-(1-i)t} dt$ converge absolument et on a

$$\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} dt = \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{-(1-i)t}}{1-i} \right]_0^{+\infty} = \operatorname{Im} \frac{1}{1-i}$$

Ainsi

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 (**)

On pose $\forall a > 0 \quad I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$

1. Justifier que $I(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.
2. Calculer $I(1)$.
3. En déduire la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Corrigé : 1. Soit $a > 0$. Notons $f(t) = \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2}$ pour $t > 0$. On a $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis, par croissances comparées, on obtient $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et

$$t^{\frac{3}{2}}f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

d'où $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$ d'où

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$ converge pour tout $a > 0$.

2. L'intégrande f est continue. Avec le changement $t = 1/u$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2} du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On en déduit

$I(1) = 0$

Variante : Le changement $u = \ln(t)$ permet également de conclure avec l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré en zéro.

3. Soit $a > 0$. Avec le changement de variable $t = au$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt \quad \text{et} \quad a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u) + \ln(a)}{a^2(1+u^2)} du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = [\operatorname{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ converge et par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, il vient

$$I(a) = \frac{1}{a} \left[I(1) + \frac{\pi}{2} \ln(a) \right]$$

On conclut

$$\forall a > 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$$

Exercice 7 (**)

1. Montrer la convergence et l'égalité des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3 + 1} dt$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$.

Corrigé : 1. On pose $\forall t \geq 0 \quad f(t) = \frac{1}{t^3 + 1}$

On a $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de f sur $[0; +\infty[$. Avec le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, il vient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{1}{u^3}\right) u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 + u^3} du$$

2. On a
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t^2 - t + 1)}$$

d'où
$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)}{(1+t)(t^2 - t + 1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left((t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

Ainsi

$$I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 8 (*)

Montrer
$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x})$$

Corrigé : On a $f : t \mapsto e^{-t^2}$ et $g : t \mapsto e^{-t}$ continues sur $[0; +\infty[$. La fonction g est intégrable sur $[0; +\infty[$ On a

$$e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t})$$

On en déduit l'intégrabilité de f sur $[1; +\infty[$ et par intégration des relations de comparaison, on a

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t} dt\right) \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}$$

Ainsi

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x})$$

Exercice 9 (**)

Montrer
$$\int_0^x \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

Corrigé : On a $f :]0; +\infty[\mapsto \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) \in \mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis

$$\operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

La fonction f est prolongeable par continuité d'où la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ (faussement impropre). En revanche, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge d'après le critère de Riemann et par intégration des relations de comparaison, on trouve

$$\int_1^x \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$$

On a $\int_0^1 \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt = o(\ln(x))$ puisque $\ln(x) \rightarrow +\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$ et par conséquent

$$\int_0^x \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt = \int_0^1 \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt + \int_1^x \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt = \ln(x) + o(\ln(x))$$

On conclut

$$\boxed{\int_0^x \operatorname{th} \left(\frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)}$$