Feuille d'exercices n°02

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)}$

Corrigé : 1. On a $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

D'où
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right] = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

2. On choisit une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui s'annule en 1, à savoir $t \mapsto 1-\dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t}$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t-1}{t}$ et $t \mapsto \ln(1-t^2)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,[$. On a

$$\left(\frac{t-1}{t}\right)\ln(1-t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-(-t^2)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{t-1}{t}\right)\ln(1-t^2) = -\frac{(1-t^2)\ln(1-t^2)}{t(t+1)} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

en utilisant la limite $u\ln u \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Ainsi, le crochet $\left[\dfrac{t-1}{t}\ln(1-t^2)\right]$ admet des limites finies en 0 et 1 et par conséquent, les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t-1}{t}\,\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or on a

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t}\,\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

qui est clairement convergente puisque l'intégrale est faussement impropre en 0 et 1. Par conséquent, on a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t-1}{t}\ln(1-t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln(2)}$$

3. Il s'agit d'une intégrale de fonction continue sur un segment ! On pose $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right) \iff t = \varphi(u) = 2\,\mathrm{Arctan}\,(u)$ bijection $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]\,0\,;+\infty\,[$ sur $\left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$. Par trigonométrie, on a

$$\cos(t) = \cos\left(2\frac{t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

et $\qquad \cos(t) = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\tan\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{2u}{1+u^2} \quad$ et $\quad \mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(\sqrt{2}+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi, en observant que $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(\sqrt{2}+1)^2+u^2} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{\pi}{2}$$

On conclut $$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)} = \pi}$$

Exercice 2 (**)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur en cas de convergence.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ avec $x > 0$.

Corrigé : 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\alpha = 0$, le résultat est immédiat avec la divergence de l'intégrale. Supposons $\alpha \neq 0$. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\int_0^{x} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right]$$

Notons $\alpha = a + \mathrm{i}b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $|\mathrm{e}^{-\alpha t}| = \mathrm{e}^{-at}$ pour tout t réel. Si $a < 0$, alors $\mathrm{e}^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et si $a > 0$, alors $\mathrm{e}^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Supposons $a = 0$. Si $\mathrm{e}^{-\alpha t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, alors on trouve

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b(t+u)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell = \ell\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu} \quad \text{avec} \quad |\ell| = 1$$

ce qui implique $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu} = 1$ pour tout u réel. Il s'ensuit que $b = 0$ ce qui est exclu puisque $\alpha \neq 0$. On en déduit que si $a = 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ n'admet pas de limite. Ainsi, passant à la limite dans le cas $a > 0$, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad \text{et dans ce cas} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}}$$

2. Soit $x > 0$. On $\operatorname{Re}(x-\mathrm{i}) = x > 0$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t$ ainsi que celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t$ et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}$$

Sachant $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

On conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2+1}}$$

Exercice 3 (**)

Soient a, b réels avec $a < b$ puis $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ convergente.

Vérifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [f(a+t) - f(b+t)]\, \mathrm{d}t$.

Corrigé : Pour x, y réels avec $x \leqslant y$, on a par linéarité de l'intégrale (sur segment) puis changement de variables

$$\begin{aligned}
\int_x^y [f(a+t) - f(b+t)]\, \mathrm{d}t &= \int_x^y f(a+t)\, \mathrm{d}t - \int_x^y f(b+t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{x+a}^{y+a} f(t)\, \mathrm{d}t - \int_{x+b}^{y+b} f(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{x+a}^{x+b} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{x+b}^{y+a} f(t)\, \mathrm{d}t - \int_{x+b}^{y+a} f(t)\, \mathrm{d}t - \int_{y+a}^{y+b} f(t)\, \mathrm{d}t \\
\int_x^y [f(a+t) - f(b+t)]\, \mathrm{d}t &= \int_{x+a}^{x+b} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{y+b}^{y+a} f(t)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$, on a

$$\int_{y+b}^{y+a} f(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{y+b} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{y+a} f(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$$

Puis, pour $\varepsilon > 0$, il existe A réel tel que pour $t \leqslant \mathrm{A}$, on a $|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Pour $x + b \leqslant \mathrm{A}$, on a

$$\left| \int_{x+a}^{x+b} f(t)\, \mathrm{d}t - \ell(b-a) \right| = \left| \int_{x+a}^{x+b} (f(t) - \ell)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x+a}^{x+b} |f(t) - \ell|\, \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\varepsilon$$

ce qui prouve
$$\int_{x+a}^{x+b} f(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell(b-a)$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} [f(a+t) - f(b+t)]\, \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \ell(b-a).}$$

Exercice 4 (Intégrales de Bertrand ***)

Étudier, en fonction des réels α et β, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$.

Corrigé : L'intégrande f est continu par morceaux sur $[\,\mathrm{e}\,; +\infty\,[$. Supposons $\alpha = 1$. Avec le changement de variables $u = \ln(t)$, les intégrales $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln(t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ sont de même nature et par critère de Riemann, il s'ensuit

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 1, \text{ l'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln(t)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1.}$$

Supposons $\alpha > 1$ et soit $\gamma \in \,]\,1\,; \alpha\,[$. On a

$$t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} \ln(t)^\beta} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

clairement si $\beta \geqslant 0$ et par croissances comparées si $\beta < 0$. Ainsi, on a

$$\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, il s'ensuit que f est intégrable sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$. Supposons $\alpha < 1$. On a

$$tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\ln(t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

clairement si $\beta \leqslant 0$ et par croissances comparées si $\beta > 0$. Autrement dit, on a

$$\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(f(t))$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, alors par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \text{ converge si } \alpha > 1 \text{ et diverge si } \alpha < 1.}$$

Exercice 5 (***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall t \in\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad f(t) = \ln(\mathrm{th}\,(t))$

On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis, comme $\mathrm{th}\,(t) \underset{t\to0}{=} t + \mathrm{o}(t)$, on a

$$\sqrt{t}\ln(\mathrm{th}\,(t)) = \sqrt{t}\ln t + \sqrt{t}\ln(1+\mathrm{o}(1)) \xrightarrow[t\to0]{} 0$$

autrement dit $f(t) \underset{t\to0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Ensuite, on a

$$\ln(\mathrm{th}\,(t)) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{th}\,(t) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\,(t) - 1 = -\frac{2\mathrm{e}^{-2t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2t}$$

On en déduit que $\ln(\mathrm{th}\,(t)) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est donc intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $t \mapsto -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t} \xrightarrow[t\to1]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{ie}^{it}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or, on a $\left|\dfrac{\mathrm{ie}^{it}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$ d'où la convergence absolue de la deuxième intégrale d'après le critère de Riemann et on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Remarque : On en déduit en particulier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ qui sont respectivement partie réelle et imaginaire de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. On a $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Supposons $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ convergente. D'après le résultat de la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{convergente}$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

4. L'idée consiste à écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t\sin(t^2)}{2t}\,\mathrm{d}t$

Les fonctions $t \mapsto 1-\cos(t^2)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{1-\cos(t^2)}{2t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{4} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t^2)}{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or, on a

$$\frac{1-\cos(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t^2)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On conclut $$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Remarque : Cette intégrale s'appelle *intégrale de Fresnel.*

Exercice 6 (***)

Vérifier l'existence puis calculer

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\ldots(t+n)}$$

Corrigé : Soit $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f_n(t) = \frac{1}{(t+1)(t+2)\ldots(t+n)}$$

On a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Notons $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}+k)$ et $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+k)\mathrm{P}_k$ pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par décomposition en éléments simples, il existe des réels α_k tels que

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\mathrm{X}+k}$$

Pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ fixé, multipliant l'égalité précédente par $\mathrm{X}+k$ puis substituant $\mathrm{X} = -k$, on trouve

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \alpha_k = \frac{1}{\mathrm{P}_k(-k)}$$

avec $$\mathrm{P}_k(-k) = \prod_{i=1}^{k-1}(-k-i)) \prod_{i=k+1}^{n}(i-k) = (-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!$$

d'où $$\frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{\mathrm{X}+k}$$

Ainsi, pour $x > 0$, il vient par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\left[\ln(x+k)-\ln(k)\right]\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\left[\ln(x)+\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)-\ln(k)\right]\end{aligned}$$

Or, un changement d'indice montre que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} = (1-1)^{n-1}$ et faisant tendre $x \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\ldots(t+n)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n-1}{k-1}\ln(k)}$$

Exercice 7 (***)

1. Justifier l'existence de $$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{I}$ puis en déduire la valeur de I.

Corrigé : 1. On pose $f(t) = \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ pour $t \in \,]\,0\,;1\,[$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$$

Ainsi, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et 1 et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Avec le changement de variables $u = -\ln(t)$, les intégrales étant de même nature donc convergentes et par conséquent égales, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Soit $x > 0$. En remarquant $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$, on a par linéarité de l'intégrale car convergence

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Avec le changement de variables $v = 2u$ dans la deuxième intégrale puis la relation de Chasles, on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{2x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v}\,\mathrm{d}v = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Par décroissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$, on obtient

$$\mathrm{e}^{-2x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Par encadrement, on conclut $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables.

1. Montrer $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
2. Montrer que le produit ff' est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : 1. On a $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f'(x) = f'(0) + \displaystyle\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$

d'où l'existence d'une limite finie ℓ pour $f'(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Supposons $\ell > 0$. Il existe $a \geqslant 0$ tel que pour $f'(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ pour $t \geqslant a$ puis

$$\forall x \geqslant a \qquad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(a) + \frac{\ell}{2}(x-a)$$

ce qui contredit l'intégrabilité de f. Si $\ell < 0$, on applique ce qui précède à $-f$. On conclut

$$\boxed{f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

2. Comme f' est continue et convergente en $+\infty$, on en déduit que $f'(t) = \mathrm{O}(1)$ et par suite $ff' = \mathrm{O}(f)$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction } ff' \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 9 (**)

Déterminer un équivalent simple pour $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Soit $x > 0$. On a $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \in \mathscr{C}_{pm}([\,x\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de cette fonction. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,x\,;+\infty\,[$ et

$$\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to x]{} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to x]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

Or, on remarque
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\right)$$

D'où, par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi
$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}}$$

Exercice 10 (**)

On pose
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et préciser ses variations.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x)$ puis un équivalent de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to 0^+$.

Corrigé : 1. On pose
$$\forall t > 0 \qquad f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

On a $f \in \mathscr{C}^0(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où l'intégrabilité de f par comparaison et critère de Riemann. Par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie, de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ avec } \mathrm{F}'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \text{ pour } x > 0.}$$

2. La fonction F est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$. D'après le théorème de limite monotone, la fonction F est minorée sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si elle admet une limite finie en 0^+. Or, on a $f(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc, d'après le critère des équivalents pour des fonctions positives, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ sont de même nature donc divergentes et par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, autrement dit F n'admet pas de limite finie en 0^+ d'où

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty}$$

Soit $x > 0$. On a par relation de Chasles

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{F}(1)$$

Comme $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t} geq 0$ et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$$

Et remarquant $\mathrm{F}(1) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(\ln(x))$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}$$

Exercice 11 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ décroissante positive. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $(\mathrm{S}_n)_n$ converge et dans ce cas

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Supposons f intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. Soit n entier non nul. Par décroissance de f, on a

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!] \qquad \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par sommation, on trouve

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{f(1)}{n} \leqslant \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, il vient par encadrement

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Supposons f non intégrable. Comme f est positive, on en déduit que $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ par théorème de limite monotone appliqué à la fonction décroissante $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après la minoration précédemment établie (qui ne requiert pas l'intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$), on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n \geqslant \frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par comparaison, il s'ensuit que $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On conclut

La fonction f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $(\mathrm{S}_n)_n$ converge et dans ce cas $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 (***)

Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On pose $\qquad \forall t > 0 \qquad f_\alpha(t) = \ln\left(1+\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right)$

Pour $t > 1$, on a $t^\alpha > 1$ d'où
$$\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} < 1$$
ce qui prouve que le terme dans le logarithme reste strictement positif d'où $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$.

Pour $\alpha > 0$, on a
$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + h_\alpha(t)$ avec $g_\alpha(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ et $h_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(t)^2}{t^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^{2\alpha}}\right)$

Les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et on a
$$-\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to 1]{} -\cos 1 \quad \text{et} \quad -\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales
$$\int_1^{+\infty} g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$
sont de même nature. Or, on observe $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ d'où la convergence absolue de la deuxième intégrale d'après le critère de Riemann et par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On a
$$h_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{\sin(t)^2}{t^{2\alpha}} \leqslant 0$$
D'après le critère des équivalents (licite, signe constant au voisinage de $+\infty$), les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Si $2\alpha > 1$, on a $\dfrac{\sin(t)^2}{t^{2\alpha}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{2\alpha}}\right)$ intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Supposons enfin $2\alpha \leqslant 1$. On observe
$$\forall t \geqslant 1 \qquad \frac{\sin(t)^2}{t^{2\alpha}} = \frac{1-\cos(2t)}{t^{2\alpha}}$$
Comme vue ci-avant, une intégration par parties permet d'établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$. Si on suppose l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ convergente, il vient par linéarité car convergence
$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1-\cos(2t)}{t^{2\alpha}} + \frac{\cos(2t)}{t^{2\alpha}}\right)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2\alpha}} \text{ converge}$$
ce qui est faux pour $2\alpha \leqslant 1$. On en déduit

$$\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff 2\alpha > 1$$

Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (g_\alpha + h_\alpha)(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ puisque $(g_\alpha + h_\alpha) - g_\alpha = h_\alpha$ avec linéarité de l'intégrale sous réserve de convergence. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$