Corrigé du devoir en temps libre n°2

Problème I

1. On a

$$\forall (x,t) \in \left]-1\,;1\right[\times [\,0\,;\pi\,] \qquad 1-2x\cos(t)+x^2 \geqslant 1-2\,|x|+x^2 = (1-|x|)^2 > 0$$

Ainsi, pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, la fonction $t \mapsto (1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ à valeurs dans $\left]0\,;+\infty\right[$ et par composition, la fonction $t \mapsto \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$ d'où

$$\boxed{\text{Pour } x \in \left]-1\,;1\right[\text{, la fonction } t \mapsto \ln(1-2x\cos(t)+x^2) \text{ est intégrable sur } [\,0\,;\pi\,].}$$

2. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$

avec $\mathrm{X} = \left]-1\,;1\right[$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;\pi\,]$. On vérifie :
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t)$ continue par morceaux et intégrable sur le segment I.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2(x-\cos(t))}{x^2-2x\cos(t)+1}$$

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
- **Domination :** Soit $a \in \left]0\,;1\right[$ puis $(x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I}$. On a clairement

$$(1-x\cos(t))^2 + (x\sin(t))^2 \geqslant (1-x\cos(t))^2$$

et par inégalité triangulaire inverse

$$|1-x\cos(t)| \geqslant |1-|x\cos(t)|| = 1-|x\cos(t)| \geqslant 1-a > 0$$

Par conséquent

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{4}{(1-a)^2}$$

La fonction φ est clairement continue par morceaux, intégrable sur le segment I. Par régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a \in \left]0\,;1\right[$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left]-1\,;1\right[.}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{2(x-\cos(t))}{x^2-2x\cos(t)+1}\,\mathrm{d}t$$

Fixons $x \in \left]-1\,;1\right[$. L'application $\varphi(u) = 2\operatorname{Arctan}(u)$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathrm{J} = \left]0\,;+\infty\right[$ sur $\mathring{\mathrm{I}} = \left]0\,;\pi\right[$. Comme $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathring{\mathrm{I}}$, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{2(x-\cos(t))}{x^2-2x\cos(t)+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{2\left(x-\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}{x^2-2x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}+1}\,\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)u^2+(x-1)}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\end{aligned}$$

Une décomposition en éléments simples donne pour $x \neq 0$

$$\frac{(x+1)u^2+(x-1)}{\left((x+1)^2u^2+(x-1)^2\right)(1+u^2)} = \frac{1}{2x}\left[\frac{1}{1+u^2}+\frac{x^2-1}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2}\right]$$

Par suite, on a $$\mathrm{F}'(x) = \frac{2}{x}\left[\mathrm{Arctan}\,(u)+\mathrm{Arctan}\,\left(u\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_0^{+\infty}$$

et comme $\dfrac{x+1}{x-1}<0$, il vient $$\mathrm{F}'(x) = \frac{2}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

La fonction F' étant continue en 0, on trouve

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}'(x) = 0}$$

4. Reprenons l'égalité établie à la première question :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1,1\} \times [\,0\,;\pi\,] \qquad 1-2x\cos(t)+x^2 = (x-\cos(t))^2+\sin^2 t$$

Par suite, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1,1\} \times [\,0\,;\pi\,]$, on a

$$1-2x\cos(t)+x^2 = 0 \iff \sin(t) = 0 \quad \text{et} \quad x-\cos(t) = 0 \iff t \in \{0,\pi\} \quad \text{et} \quad x = \pm 1$$

Ceci est impossible par hypothèse sur x d'où

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1,1\} \times [\,0\,;\pi\,] \qquad 1-2x\cos(t)+x^2 > 0$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1,1\}$, la fonction $t \mapsto (1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$ et par composition, la fonction $t \mapsto \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \text{ existe pour tout } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1,1\}.}$$

5. D'après le résultat de la question 4, on sait que F est constante sur $]-1\,;1\,[$ et comme $\mathrm{F}(0)=0$, il s'ensuit que F est nulle sur cet intervalle. Pour $x \in \,]-1\,;1\,[$, on a

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(1-2\frac{\cos(t)}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left[\ln(x^2-2x\cos(t)+1)-\ln(x^2)\right]\,\mathrm{d}t$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|<1 \\ 2\pi\ln|x| & \text{si } |x|>1 \end{cases}}$$

Problème II

1. On a $\psi \in \mathscr{C}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux et

$$\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}} \qquad \psi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction ψ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est intégrable sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On pose $$\forall (x,u) \in \mathbb{R} \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad f(x,u) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$$

Supposons $x<0$. On a $f(x,u) \xrightarrow[u\to x]{} \infty$ ce qui contredit le caractère continue par morceaux de $u \mapsto f(x,u)$. Il s'ensuit que $x \geqslant 0$. On a bien $u \mapsto f(x,u) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Si $x=0$, on a

$$f(x,u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} > 0$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, la fonction $u \mapsto f(x,u)$ n'est pas intégrable. Enfin, si $x > 0$, on a $f(x,u) \underset{u\to 0}{=} \mathrm{O}(\psi(u))$ et $f(x,u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\psi(u))$. Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de la fonction F est }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

3. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.
• Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,u)$ est est continue par morceaux et intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ d'après l'étude précédente.
• Pour $t > 0$, on a $x \mapsto f(x,u) \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,u) \in\,]\,0\,;+\infty\,[^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$$

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• **Domination :** Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,u) \in [\,a\,;+\infty\,[\, \times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{a^2\sqrt{u}}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ d'après le résultat de la première question. Par régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u}$$

4. Soit $x > 0$. Les fonctions $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u+x} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{u}{(u+x)x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$-\frac{u\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)x} = \frac{\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}}{(u+x)x} \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{u\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)x} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$$

Le crochet étant fini, il vient en intégrant par parties, par convergence des intégrales concernées :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(x) &= \underbrace{\left[\frac{u\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{u}{(u+x)x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} + \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2u\sqrt{u}}\right)\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^{+\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{x\sqrt{u}} - \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(u+x)\sqrt{u}} + \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2x(u+x)\sqrt{u}}\right]\,\mathrm{d}u \\
\mathrm{F}'(x) &= -\frac{\mathrm{K}}{x} + \mathrm{F}(x) - \frac{\mathrm{F}(x)}{2x}
\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\forall x > 0 \qquad x\mathrm{F}'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(x) = -\mathrm{K}}$$

5. La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme produit de telles fonctions. Par dérivation, on trouve pour $x > 0$

$$\mathrm{G}'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x) + \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[\left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{F}(x) + x\mathrm{F}'(x)\right] = -\mathrm{K}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

La fonction ψ étant continue, intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on sait que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \psi(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de dérivée égale à ψ d'où, par intégration

$$\boxed{\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$$

6. On a clairement $\qquad \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{C} - \mathrm{K}^2$

Puis $\qquad \forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{x\sqrt{u}} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{x}$

Par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Avec cette résultat et le théorème des croissances comparées, il vient

$$\mathrm{G}(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{K}^2 = \mathrm{C}$$

On en déduit $\mathrm{C} \geqslant 0$ et $\mathrm{K} = \sqrt{\mathrm{C}}$. On effectue le changement de variables $u = xv$ dans l'écriture de $\mathrm{G}(x)$ pour $x > 0$. On trouve

$$\mathrm{G}(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xv}}{\sqrt{xv}(xv+x)} x\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xv}}{\sqrt{v}(v+1)}\,\mathrm{d}v$$

On a

$$\forall (x,v) \in \,]\,0\,;+\infty\,[^2 \qquad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xv}}{\sqrt{v}(v+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{v}(v+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{-xv}}{\sqrt{v}(v+1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{v}(v+1)}$$

Par convergence dominée, on en déduit

$$\mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}(v+1)}$$

Un dernier changement de variables $t = \sqrt{v}$ permet d'obtenir $\mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \pi$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{K} = \sqrt{\pi}}$$