

## Devoir en temps libre n°03

### Problème I

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels non nuls. On note

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$$

On dit que le *produit infini*  $\prod u_n$  converge si la suite  $(P_n)_n$  admet une limite finie non nulle.

1. Montrer que si  $\prod u_n$  converge, alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ .
2. On suppose que  $(u_n)_n$  est une suite de réels positifs. Montrer

$$\prod (1 + u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

3. On suppose que  $(u_n)_n$  est une suite à valeurs dans  $[0; 1[$ . Montrer

$$\prod (1 - u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

### Problème II

On pose  $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

1. Justifier que  $R_n$  est bien défini pour  $n$  entier.
2. Montrer la convergence de la série  $\sum R_n$ .
3. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ . Pour  $N$  entier, On pourra considérer

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} + R_N \right)$$

### Problème III

On définit la suite  $(u_n)_n$  par  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{th}(u_n)$  pour  $n$  entier.

1. Montrer  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$
2. En considérant la suite  $(v_n)_n$  définie par  $v_n = 2^n u_n$  pour  $n$  entier, déterminer, à constante près, un équivalent simple de  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
3. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### Problème IV

Étudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^{1/4}}$ .