ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°04

Exercice 1 (*)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Corrigé : On pose $$\forall (x,t)\in \mathrm{X}\times\mathrm{I}\qquad f(x,t)=\frac{1-\cos(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}$$
avec $\mathrm{X}=\mathbb{R}$ et $\mathrm{I}=\,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.
• Pour x réel, on a $t\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux puis
$$f(x,t)\underset{t\to 0}{=}\frac{\mathrm{o}(t)}{t}\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to 0]{}0$$
et par croissances comparées $$f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
On en déduit l'intégrabilité de $t\mapsto f(x,t)$ sur $]\,0\,;1\,]$ (faussement impropre) et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann d'où l'intégrabilité sur I.
• Pour $t\in\mathrm{I}$, on a $x\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve
$$\forall (x,t)\in\mathrm{X}\times\mathrm{I}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}$$
• Pour $x\in\mathrm{X}$, on a $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\in\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a
$$\forall (x,t)\in\mathrm{X}\times\mathrm{I}\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)\quad\text{avec}\quad\varphi(t)=\mathrm{e}^{-t}$$
et $\varphi\in\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=[-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty}=1$. On conclut
$$\boxed{\mathrm{F}\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$
2. Par dérivation sous l'intégrale, on a
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
Soit x réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument et on trouve
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{F}(x)=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}x}\right)=\frac{x}{x^2+1}$$
Par intégration, il vient $$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)+\int_0^x\mathrm{F}'(u)\,\mathrm{d}u$$
Et ainsi $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

Exercice 2 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $\qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(x+t) - \operatorname{Arctan}(t)]\ \mathrm{d}t$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \operatorname{Arctan}(x+t) - \operatorname{Arctan}(t)$$

avec $\mathrm{X} = [\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;+\infty\,[$. On vérifie :

• Pour $x \geqslant 0$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ puis, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$0 \leqslant f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

d'où l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+(x+t)^2}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

et $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I. On conclut

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}([\,0\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+x)^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$$

Par intégration, on obtient

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}x - x\operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

Remarque : On peut étendre ce qui précède à x réel mais cela demande plus de soin. Pour l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ avec x réel, avec la relation fondamentale

$$\forall u > 0 \qquad \operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, pour $t > \max(-x, 0)$, on a

$$f(x,t) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{x+t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Pour la domination, pour $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

avec $$\forall t \geqslant 0 \qquad \psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\,0\,;a\,] \\ \dfrac{1}{1+(t-a)^2} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

La dominante ψ est continue par morceaux et intégrable sur I et on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Exercice 3 (*)

Pour x réel, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathrm{F}' + \mathrm{G}'$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. La fonction G est le carré d'une primitive de la fonction continue g. Puis, on vérifie :
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
• Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxe inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$\mathrm{F}'(x) + \mathrm{G}'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale permet d'obtenir

$$\boxed{\mathrm{F}' + \mathrm{G}' = 0}$$

3. La fonction $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{F}+\mathrm{G})(x) = (\mathrm{F}+\mathrm{G})(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

D'où, après intégration $\qquad \forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

et par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\qquad \mathrm{G}(x) = \dfrac{\pi}{4} + \mathrm{o}(1)$

On conclut $\qquad \boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Exercice 4 (*)

On pose $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Lambda = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que F est bien définie, continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{F}(x)$. On pourra chercher à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de Λ pour $x > 0$.

Corrigé : 1. On pose $f(x,t) = \mathrm{e}^{-xt^2}$ pour $(x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I}$ avec $\mathrm{X} =]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t)$ continue (par morceaux) sur I par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t)$ continue sur X par théorèmes généraux.
• Domination : on procède localement car $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{x>0} \mathrm{e}^{-xt^2} = 1$ et $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur I.
Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où son intégrabilité sur I. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction F est bien définie et continue sur tout $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Soit $x > 0$. Avec le changement de variables $u = \sqrt{x}t$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et égales et par conséquent

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\Lambda}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty}$$

Exercice 5 (**)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
   On admet l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$

avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{J} = [\,0\,;+\infty\,[$. On vérifie :

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ avec $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} -\, t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Soit x réel. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec

$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\sin(xt) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\sin(xt) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Le crochet étant fini, il vient par intégration par parties (convergence des intégrales concernées)

$$\mathrm{F}'(x) = \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

D'où $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) + \frac{x}{2}\mathrm{F}(x) = 0}$$

3. On en déduit que $\mathrm{F} \in \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}})$ et sachant $\mathrm{F}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}$$

Exercice 6 (*)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ se prolonge par continuité et que son prolongement est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corrigé : 1. On pose $f(x,t) = \sin(tx)$ pour $(x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I}$ avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^n$ sous l'intégrale avec n entier non nul.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t)$ continue (par morceaux) par théorèmes généraux et intégrable sur le segment I.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^n(\mathrm{X},\mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^k \sin\left(tx + \frac{k\pi}{2}\right)$$

• Soit $k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$. Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ continue (par morceaux) par théorèmes généraux et intégrable sur le segment I.
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ continue (par morceaux) sur I par théorèmes généraux.

• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 1$$

La fonction φ est clairement continue (par morceaux) et intégrable sur I. Ainsi, d'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^n$ sous l'intégrale, on a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et ce pour tout n entier non nul d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

2. Par intégration, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction définie sur } \mathbb{R}^* \text{ par } x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x} \text{ se prolonge par} \\ \text{continuité et son prolongement, la fonction F, est de classe } \mathscr{C}^\infty.\end{array}}$$

Exercice 7 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

3. Pour $x > 0$, calculer $\mathrm{F}''(x)$.
4. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}$

avec $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{X} = \mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Soit $t \in \mathrm{I}$. On a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ puis $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ce qui prouve que φ est intégrable sur I. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on a

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}$$

2. On note $\mathrm{X}' =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^2$ sous l'intégrale.

• Soit $x \in \mathrm{X}'$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.
• Soit $t \in \mathrm{I}$. On a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^2(\mathrm{X}',\mathbb{R})$ par théorème généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{e}^{-xt} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \sin^2 t\,\mathrm{e}^{-xt}$$

• Soit $x \in \mathrm{X}'$. On a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ puis

$$-\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur I.
• Soit $x \in \mathrm{X}'$. On a $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) = \mathrm{e}^{-at}$$

La fonction ψ est intégrale sur I. Ainsi, par régularité $\mathscr{C}^2$ sous l'intégrale, on a F de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2 t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-2\mathrm{i}}\right)\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right]}$$

4. Par intégration, on trouve pour $x > 0$

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \alpha$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}(x\ln x - x) - \frac{1}{4}\int \ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x + \alpha x + \beta$$

avec α, β réels. En intégrant par parties, il vient

$$\int \ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x^2+4)] - \int \frac{2x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+4) - 2x = 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) &= \frac{x\ln x}{2} - \frac{x}{4}\ln(x^2+4) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha x + \beta \\ &= -\frac{x}{4}\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha x + \beta \\ \mathrm{F}(x) &\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha x + \beta \end{aligned}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on sait que $|\sin t| \leqslant |t|$ pour tout t réel d'où

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$$

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$.
Ainsi, après intégration (convergence des intégrales concernées), on obtient

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Alors, par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

On en déduit que $\alpha = 0$ (sans quoi $\mathrm{F}(x)$ aurait une limite infinie pour $x \to +\infty$) et $\beta = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x\ln x}{2} - \frac{x}{4}\ln(x^2+4) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

Par croissances comparées, on trouve $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \dfrac{\pi}{2}$ et par continuité de F en 0, on a $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to0^+]{}$ $\mathrm{F}(0)$ d'où

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{2} - \dfrac{x}{4}\ln(x^2+4) - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Remarques : (a). La fonction F est-elle dérivable en zéro ? Pour $x > 0$, on a $\mathrm{F}'(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ et d'après le théorème de limite de la dérivée

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$$

ce qui prouve que F n'est pas dérivable en zéro.

(b). On a obtenu $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$

la première égalité ayant été vue en cours. On connaît donc la valeur de l'intégrale de Dirichlet.