ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°05

Exercice 1 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \Lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.
3. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis expliciter $\mathrm{F}'(x)$ en fonction de Λ pour $x > 0$
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss Λ.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$

avec $\mathrm{X} = \mathrm{I} = [\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ également par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\, t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On a $\qquad \forall x \in \mathrm{X} \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Par comparaison (convergence immédiate)

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Ainsi, par encadrement $\qquad \boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

3. Notons $\mathrm{X}' =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, intégrable sur I d'après la domination de la première question.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}',\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On a $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x>0} \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} = 1$ et $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur I. On procède à une domination locale. Soit $a > 0$.

$$\forall (x,t) \in [\, a\,; +\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt^2} \leqslant \varphi_a(t) \quad \text{avec} \quad \varphi_a(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$$

On a $\varphi_a \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et $\varphi_a(t) = \mathrm{o}_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où φ_a intégrable sur I par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\, a\,; +\infty\,[$ pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\, 0\,; +\infty\,[\,, \mathbb{R})}$$

Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = \sqrt{x}t$, on conclut

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\Lambda}$$

4. Avec le changement de variables $t = \sqrt{x}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Par ailleurs, pour $[\, a\,; b\,] \subset]\, 0\,; +\infty\,[$, on a

$$\int_a^b \mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \xrightarrow[a\to 0, b\to+\infty]{} 0 - \mathrm{F}(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi $$-\int_0^{+\infty} \mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x = \Lambda\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\Lambda^2 = \frac{\pi}{2}$$

On conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exercice 2 (***)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\, 0\,; +\infty\,[$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\, 0\,; +\infty\,[$ puis étudier la dérivabilité en 0.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{x+t}$$

avec $\mathrm{X} = [\, 0\,; +\infty\,[$ et $\mathrm{I} =]\, 0\,; \pi\,]$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$, prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur I. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On a $\qquad \forall (x,t) \in \,]\,0\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant \dfrac{\sin(t)}{x+t} \leqslant \dfrac{\sin(t)}{x}$

D'où, après intégration $\qquad \forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{x}$

Par encadrement $\qquad \boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

Puis $\qquad \forall (x,t) \in \,]\,0\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \dfrac{\sin(t)}{x+\pi} \leqslant \dfrac{\sin(t)}{x+t} \leqslant \dfrac{\sin(t)}{x}$

et après intégration $\qquad \forall x > 0 \qquad \dfrac{2}{x+\pi} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}}$

3. Soit $\mathrm{X}' = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.
• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, intégrable d'après la domination de la première question.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}', \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sin(t)}{(x+t)^2}$$

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a $t \mapsto \underset{x>0}{\operatorname{Sup}} \dfrac{\sin(t)}{(x+t)^2} = \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ non intégrable sur I. On procède à une domination locale. Soit $a > 0$.

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{1}{a^2}$$

La fonction ψ est clairement continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi, d'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[, \mathbb{R})}$$

Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction F' est monotone sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc admet une limite en 0^+. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\forall x > 0 \qquad -\mathrm{F}'(x) \geqslant \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Par continuité sous l'intégrale de droite ci-dessus (sans difficulté), il vient par passage à la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} -\mathrm{F}'(x) \geqslant \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est positive, non intégrale sur $]\,0\,;\pi\,]$ d'où

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty$$

et par suite
$$\mathrm{F}'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, on obtient

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

Et on conclut $\boxed{\text{La fonction F n'est pas dérivable en 0.}}$

Variante : On peut procéder au changement de variables $u = x+t$ dans l'écriture de $\mathrm{F}'(x)$ pour $x > 0$ puis utiliser des intégrations de relations de comparaison.

Exercice 3 (***)

Pour $x > -1$, on pose
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > -1$.

Corrigé : 1. On pose
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{t-1}{\ln(t)} t^x$$

avec $\mathrm{X} = \,]-1\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;1\,[$. On vérifie :

• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec $f(x,t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1$ donc prolongeable par continuité en 1 et

$$t^{-x} f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \iff f(x,t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \qquad \text{avec} \qquad -x < 1$$

d'où l'intégrabilité en 0 par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : Soit $a > -1$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\, \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^a$$

et la dominante $t \mapsto t^a$ est intégrable sur I par critère de Riemann. Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ et ce pour tout $a > -1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]-1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale puis linéarité car convergence des intégrales concernées par critère de Riemann, on trouve

$$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{1+x}$$

D'où $$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On remarque $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant \frac{t-1}{\ln(t)} \leqslant 1$$

d'où $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant t^x$$

et après intégration $$\forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

Par encadrement, il vient $$\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On conclut $$\boxed{\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}$$

En particulier, on trouve $$\mathrm{F}(0) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} \,\mathrm{d}t = \ln(2)$$

Variante : Sans invoquer l'inégalité $\ln(t) \leqslant t-1$ pour $t \in \mathrm{I}$, on peut aussi observer que $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est prolongeable par continuité sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc bornée sur ce segment et conclure comme précédemment.

Exercice 4 (***)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right] \,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \exp\left[-\left(t^2 + \dfrac{x^2}{t^2}\right)\right]$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème continuité sous l'intégrale.

• Pour x réel, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction F est définie, continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. On note $\mathrm{X}' =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]$$

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On procède localement. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$. On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2b\frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ avec $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissances comparées puisque

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2} \underbrace{=}_{u=1/t} \lim_{u\to+\infty} u^2 \mathrm{e}^{-a^2u^2} = 0$$

La fonction φ est donc intégrable sur I et par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\exp\left[-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variables $u = \dfrac{x}{t}$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\exp\left[-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{u^2}+u^2\right)\right]\,\mathrm{d}u$$

Ainsi $$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0}$$

4. On en déduit $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2x}$$

Par continuité en 0, il vient $\lambda = \mathrm{F}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Enfin, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est paire d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2|x|}}$$

Exercice 5 (***)

Soient $a, b > 0$.

1. Justifier l'existence pour x réel de
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer F'.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \left]\,0\,;+\infty\,\right[$. Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux puis
$$f(x,t) = \frac{1 - at - (1 - bt) + \mathrm{o}(t)}{t} \cos(xt) = (a - b + \mathrm{o}(1)) \cos(xt) \xrightarrow[t \to 0]{} a - b$$

et par croissances comparées $\qquad f(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et intégrable d'après l'étide précédente.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \left(\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}\right) \sin(xt)$$
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-bt}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ et φ intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{b}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

Soit x réel. Par dérivation sous l'intégrale, il vient
$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}\right] \sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Par convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t$, il vient
$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-(b-\mathrm{i}x)t} - \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}x)t}\right]\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{b - \mathrm{i}x} - \frac{1}{a - \mathrm{i}x}\right)$$

D'où $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \dfrac{x}{b^2 + x^2} - \dfrac{x}{a^2 + x^2}}$

3. Par intégration il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$, on emploie une technique à la « Riemann-Lebesgue ». On pose

$$\forall t > 0 \qquad \varphi(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

Les fonctions φ et $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec

$$\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t)\frac{\sin(xt)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin(xt)}{x}\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Par dérivation $\qquad \forall t > 0 \qquad \varphi'(t) = \dfrac{t\left(-a\mathrm{e}^{-at} + b\mathrm{e}^{-bt}\right) - \mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-bt}}{t^2}$

d'où $\qquad \varphi'(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t^2(a^2-b^2)/2 + \mathrm{o}(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{a^2-b^2}{2} \quad$ et $\quad \varphi'(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Ainsi, la fonction φ' est intégrable sur I et par inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Par suite $\qquad \mathrm{F}(x) = \dfrac{\mathrm{O}(1)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

On en déduit $\alpha = 0$ et finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right)}$$

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x\tan(t))}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(x\tan(t))}{\tan(t)}$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \left]0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$. On vérifie :

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec

$$f(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} x \quad \text{et} \quad f(x,t) \xrightarrow[t\to \frac{\pi}{2}]{} 0$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ donc intégrable sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+(x\tan(t))^2}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 1$$

La dominante φ est clairement continue par morceaux, intégrable sur I. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

2. La fonction F est clairement impaire. On restreint l'étude à $x \geqslant 0$. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(x\tan(t))^2}$$

Le changement de variable $u = \tan(t)$ donne

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}$$

Par décomposition en éléments simples, pour $x \neq 1$, on obtient

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{x^2}{1+x^2u^2}\right]\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}$$

et l'égalité vaut aussi pour $x = 1$ puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F′ continue en 1. Par intégration, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+v)(1+x^2v)} = \frac{x^2v+1-x^2(v+1)}{(1+v)(1+x^2v)}\frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $v = u^2$.

3. On a $\mathrm{Arctan}\,(\tan(t)) = t$ pour $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(1) = \frac{\pi}{2}\ln(2)}$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(\sin(t))$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ avec

$$t\ln(\sin(t)) = t\ln(t + \mathrm{o}(t)) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad t\ln(\sin(t)) \xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{[t\ln(\sin(t))]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Ainsi
$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)}$$

Exercice 7 (***)

On pose $\qquad \forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,-1\,;1\,]$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-1\,;1\,[$.
3. Déterminer une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in [\,-1\,;1\,]$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)}$

avec $\mathrm{X} = [\,-1\,;1\,]$ et $\mathrm{I} =]\,0\,;\pi\,[$. On vérifie :
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec notamment un prolongement par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ puisque

$$\frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)} \xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{} x$$

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : En distinguant selon le signe de x et $\cos(t)$, on obtient

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{|\ln(1 + \cos(t))| + |\ln(1 - \cos(t))|}{|\cos(t)|}$$

On considère φ prolongée par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$. Par ailleurs, on a

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2\,|\ln t| \quad \text{et} \quad \varphi(\pi - t)t = \varphi(t)$$

Ainsi
$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi - t}}\right)$$

d'où son intégrabilité sur I. On conclut

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}([\,-1\,;1\,],\mathbb{R})}$$

2. Soit $\mathrm{X}' =]\,-1\,;1\,[$. On vérifie :
• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, intégrable sur I d'après la domination précédente.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}',\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1 + x\cos(t)}$$

- Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a \in \,]\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{1}{1-a}$$

et ψ clairement continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a \in \,]\,0\,;1\,[$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Soit $\varphi :]\,0\,;+\infty\,[\to]\,0\,;\pi\,[\,, u \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\,u$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, strictement croissante. On obtient par convergence et donc égalité des intégrales concernées

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2}$$

Puis $$\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2} = \frac{2}{1-x}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi $$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(u)\,\mathrm{d}u = \pi\,\mathrm{Arcsin}\,x$$

La fonction F étant continue sur $[\,-1\,;1\,]$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \pi\,\mathrm{Arcsin}\,x}$$