ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 11/09/2025

Commentaires - Devoir en temps libre n°1

Remarques générales : Laisser une marge pour le report des points et encadrer les résultats. Ne pas rendre l'énoncé du devoir (sous peine qu'il disparaisse). Il faut détailler les calculs : détail de la relation de Chasles, détail des développements limités, ...

⚠ Il est interdit d'additionner des équivalents.

Problème I

Il faut détailler le recours à la relation de Chasles avant l'invocation de la périodicité de l'intégrande.

Problème II

1. L'intégrande est prolongeable par continuité en 1. Invoquer un critère de comparaison est surdimensionné ici.

2. OK.

3. On peut facilement conclure avec une somme de Riemann mais les techniques de comparaison série/intégrale aboutissent également.

Problème III

1. Pour l'étude en $+\infty$ de l'intégrande, on peut notamment utiliser l'inégalité des accroissements finis ou la relation fondamentale : $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$, relation qui mérité d'être détaillée. Certains ont également utilisé une relation pour $\operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}(b)$ avec a et b positifs, relation qui requiert une démonstration. D'autres ont utilisé avec succès un argument plus fin en obtenant

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \int_0^x [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$$

puis en établissant que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $x \to +\infty$ (soit en encadrant par croissance de Arctan, soit en quantifiant la limite de Arctan en $+\infty$).

2. OK.

3. Ceux qui avaient mis en valeur l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+1} \ldots$ ont conclu avec cette approche. Pour ceux qui utilisaient la primitive exhibée à la question précédente, il fallait impérativement déterminer le comportement asymptotique de $x\,[\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x)]$ pour $x \to +\infty$ en reprenant les arguments évoqués à la question 1.

Problème IV

1. Vu en cours !

2. Il faut déclarer les intégrandes et préciser les prolongements par continuité qui ont lieu.

3. Un peu de trigonométrie, bien traitée dans l'ensemble.

4. C'est le lemme de Riemann-Lebesgue ! (Aide au test n°1). Très mal fait, ce n'est pas acceptable. À revoir impérativement pour le plus grand nombre.

5. On n'additionne jamais des équivalents ! Il faut écrire des développements limités. Parmi ceux (rares) qui pensent à étudier $\lim_{t \to 0} f'(t)$, très peu pensent à justifier que la fonction f est continue en 0. Ce point est indispensable pour invoquer le théorème de limite de la dérivée $\mathscr{C}^1$.

6. Bien traitée.