ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Commentaires - Devoir surveillé n°1 - 4h

Remarques générales : Merci de laisser une marge. Les jeux de piste sont à proscrire. Lors de l'utilisation d'un changement de variable sur une intégrale généralisée, il faut mentionner que les intégrales concernées sont de même nature et si elles sont convergentes, alors elles sont égales. De même, lors d'une intégration par parties, il faut d'abord établir que le crochet est fini puis justifier que les intégrales sont de même nature. L'égalité avec crochet vient ensuite, en cas de convergence. Pour un changement de variable pour une intégrale sur un segment, le caractère $\mathscr{C}^1$ suffit, inutile d'exiger bijectif et strictement monotone. Enfin, la comparaison (en O, o ou $\sim$) avec un intégrande de Riemann dont l'intégrale converge est une comparaison avec une fonction positive intégrable ce qui assure l'intégrabilité de la fonction que l'on compare.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1.(a) Très partiel ! Il faut vérifier les hypothèses du théorème de limite de la dérivée : on a $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, on vérifie g continue en 0 puis on calcule $g'(t)$ pour $t \neq 0$ et on détermine, avec un développement limité, la limite de g' en 0. Plusieurs évoquent un « prolongement » alors que la fonction g est définie en 0, on ne le prolonge pas.

1.(b)i. Réussite mitigée bien que ce point ait été vu en cours. On peut traiter séparément $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ce qui permet un choix plus quelconque de primitive de sin pour la seconde (pas d'annulation du dénominateur en 1).

1.(b)ii. Assez bien réussi, voir remarque en préambule.

1.(c) Très peu réussie. Il faut revoir les manipulations sur les développements limités.

1.(d) Peu réussie bien que la question soit très abordable : l'intégrale considérée est sur le segment et un simple changement de variable $u = \sqrt{\frac{n}{3}}t$ permet l'apparition de l'intégrande de Gauss. Il faut bien sûr préciser $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ pour conclure.

2.(a) Plutôt bien traitée.

2.(b) Pas si bien réussie bien que traitée en cours ... C'est dommage !

3.(a) Énormément de conjectures fausses et d'affirmations gratuites. Abordée avec succès dans seulement deux copies. À reprendre.

3.(b)i. Question simple très peu réussie. On a $\sin(t) = t(1 + \mathrm{o}(1))$ d'où

$$\sin(t)^n = t^n(1 + \mathrm{o}(1))^n = t^n(1 + \mathrm{o}(1)) = t^n + \mathrm{o}(t^n)$$

3.(b)ii. Conséquence de la question précédente (et donc très peu abordée) avec un recours au théorème de Taylor-Young.

3.(c) Bien réussie.

3.(d) Quelques amorces raisonnables, beaucoup de « récurrence immédiate », ce qui n'est pas le cas !

4.(a) OK pour une majorité mais certains sont néanmoins en difficulté sur cette question élémentaire. Il faut réagir !

4.(b) Assez bien. Il faut détailler les changements d'indice.

4.(c) Abordée par une majorité mais très peu justifient la linéarité de l'intégrale, la convergence ayant lieu.

5.(a) Traitée correctement dans une seule copie.

5.(b)i. Amorcée dans un grand nombre de copie mais très souvent inachevée, c'est dommage.

5.(b)ii. À peine abordée.

5.(c)i. Quelques rares ont vu l'inégalité des accroissements finis.

5.(c)ii., ... 5.(c)iv. Presque plus aucun point accordé.

Partie II - Montées d'une permutation de $[\![1 ; n]\!]$

1.(a) Assez bien traitée. Il faut exhiber les listes concernées.

1.(b) Même remarque que précédemment.

2. Bien réussie.

3.(a) Pas très bien réussie. Ne pas oublier de préciser $\psi(\mathrm{S}_n) \subset \mathrm{S}_n$. L'ensemble S_n n'est pas un espace vectoriel et l'application ψ n'est pas linéaire !

3.(b) Assez bien réussie par ceux qui ont abordé la question.

4.(a) Beaucoup abordée, peu réussie bien qu'il s'agisse d'un dénombrement très simple.

4.(b) Beaucoup d'arnaques pour coller à la réponse donnée dans le sujet (le correcteur n'est jamais dupe ...).

5.(a), (b) Assez bien réussies.

5.(c) Quelques bonnes rédactions.

6. Très peu abordée.

7. Question très abordable, certains l'ont repérée !