

Préparation à l'interrogation n°04

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} &= \frac{\operatorname{sh}(x) - x \operatorname{ch}(x)}{x \operatorname{sh}(x)} = \frac{1}{x^2 + o(x^3)} \left(x + \frac{x^3}{3!} - x \left(1 + \frac{x^2}{2!} \right) + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{1 + o(x)} \left(-\frac{x}{3} + o(x^2) \right) = (1 + o(x)) \left(-\frac{x}{3} + o(x^2) \right) = -\frac{x}{3} + o(x^2)\end{aligned}$$

2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2) \right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

2 Formules

Résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

3 Trigonométrie

$$1. \sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \quad 2. \cos(t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

4 Calcul matriciel

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$;

2. Soit $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation

$$\forall (i,j,k,\ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4 \quad E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

3. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$;

4. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$;

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{Com}(A)^\top = \operatorname{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$$

6. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $A = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det(A)$ dit *de Vandermonde* vaut

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg}(A) = r$. Il existe P, Q dans $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$ avec $J_r = \operatorname{diag}(I_r, 0)$.

5 Dérivation

Dérivée première et seconde des fonctions :

1. $\forall t > 0 \quad f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$;
2. $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \text{Arctan}(t)$.

6 Polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et m entier non nul. On a

$$a \text{ racine d'ordre } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

$$a \text{ racine d'ordre au moins } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$$

7 Exercice type

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = (X-1)P' - nP$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, préciser sa matrice dans la base canonique puis déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation puis $\varphi(X^k) = (k-n)X^k - kX^{k-1}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Notant $\mathcal{C}$ la base canonique de E , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{C}} \varphi = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\text{Ker } \varphi$, on résout l'équation différentielle $(t-1)x' - nx = 0$ sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$. On trouve $\text{Vect}(t \mapsto (t-1)^n)$ comme espace de solutions d'où $(X-1)^n$ générateur de $\text{Ker } \varphi$. D'après le théorème du rang, il s'ensuit $\text{rg } \varphi = n$. D'après la forme de la matrice, on a $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et l'inclusion est une égalité par égalité des dimensions. Ainsi, on conclut

$$\boxed{((X-1)^n) \text{ base de } \text{Ker } \varphi, (X^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \text{ base de } \text{Im } \varphi}$$

8 Exercice type

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(M) = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^\top$.

Corrigé : Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X | \dots | y_n X) = XY^\top$ avec Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \neq 0$ puisque l'un des y_j vaut 1.

9 Questions de cours

Structures, révisions et compléments d'algèbre linéaire, graphe