

Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

Soit $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi $\star$ définie par $(x, y) \star (a, b) = (xa, xb + ya)$. Montrer $(G, \star)$ est un groupe.

Exercice 2 (**)

Soit φ un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer

$$\sum_{x \in G} \varphi(x)$$

On pourra considérer l'application $x \mapsto a \star x$ avec $a \in G$ bien choisi.

Exercice 3 (*)

Soit A un anneau. On définit le *centre* de A noté $Z(A)$ par

$$Z(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A \quad ax = xa\}$$

Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$.

Exercice 4 (*)

On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif puis déterminer $U(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.

Exercice 5 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe n entier non nul tel que $x^n = 0_A$. On note

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid x \text{ nilpotent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A .
2. Soit $a \in \mathcal{N}(A)$. Montrer que $1_A - a$ est inversible.
3. Soit $a \in \mathcal{N}(A)$ et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

Exercice 6 (*)

Soient $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i=1}^n P_i \mathbb{K}[X]$ est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. On appelle *plus petit commun multiple* des P_i le polynôme unitaire ou nul noté $P_1 \vee \dots \vee P_n$ engendrant cet idéal.
2. Justifier que le ppcm des P_i est multiple de chacun des P_i et montrer pour $P \in \mathbb{K}[X]$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P_i | P \implies P_1 \vee \dots \vee P_n | P$$

Exercice 7 ()**

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X-a)(X-b)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$.

Exercice 8 (*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. Déterminer r le nombre de racines de P en fonction de P et $P \wedge P'$.

Exercice 9 ()**

Soit $(P_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2, P_3 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$ $P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n .

Exercice 10 (*)

Soit
$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{K}_{2n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ P \longmapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n-1)}(0), P(1), P'(1), \dots, P^{(n-1)}(1)) \end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 11 ()**

Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt[3]{x}$$

Exercice 12 ()**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Établir
$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{P^{(k)}}{k!}$$

Exercice 13 (*)

On pose
$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que E est un algèbre réelle commutative pour les lois usuelles.

Exercice 14 (*)

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$ -algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.