

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (**)

On note $SL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que $(SL_n(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et G un sous-groupe de $GL(E)$ de cardinal fini n . Montrer

$$\dim \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id}) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g)$$

Exercice 3 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non commutatif et $a \in A$ qui possède un inverse à droite et un seul. Montrer que a possède un inverse à gauche.

Exercice 4 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$. On définit le *radical* de I noté $R(I)$ par

$$R(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x^n \in I\}$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I .
2. Montrer que pour I, J des idéaux de A , on a

$$I \subset J \implies R(I) \subset R(J) \quad R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$$

3. Soit I idéal de A . Montrer $R(R(I)) = R(I)$

Exercice 5 (**)

Que peut-on dire d'une suite croissante d'idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$?

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Exercice 7 (***)

Soit $n \geq 2$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. On suppose qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ non constants et unitaires tels que $AB = P$. On note $r = \deg A$ et $s = \deg B$. Montrer

$$A = X^r A \left(\frac{1}{X} \right) \quad \text{et} \quad B = X^s B \left(\frac{1}{X} \right)$$

Exercice 8 (**)

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer

$$\exists!(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k)$$

Exercice 9 (***)

1. Déterminer les polynômes complexes surjectifs.
2. Déterminer n entier pour que l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto z^n$ soit injective.
3. En déduire les polynômes complexes injectifs.

Exercice 10 (**)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$$

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P .
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 11 (***)

Soit $P = X^3 + pX + q$ avec p, q complexes. Montrer

$$P \text{ admet une racine double} \iff 4p^3 + 27q^2 = 0$$

Exercice 12 (***)

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ unitaire. Montrer que toute racine ω de P vérifie

$$|\omega| \leq 1 + \max_{k \in [0; n-1]} |a_k|$$

Exercice 13 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.