

DM 3 de Physique à rendre le vendredi 3/10/25

Capture d’empreintes digitales par réflexion totale frustrée

Il existe différentes technologies de capteurs d’empreinte digitale, c’est-à-dire de dispositifs permettant d’obtenir une image numérisée d’une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d’identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d’empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l’objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l’hypoténuse d’un prisme droit isocèle taillé dans un verre d’indice optique noté  $n$ . Il est éclairé par une diode laser de longueur d’onde  $\lambda_0$  dans le vide. L’image de l’empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



Figure 1 Capteur d’empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninof, 2009-10-21)

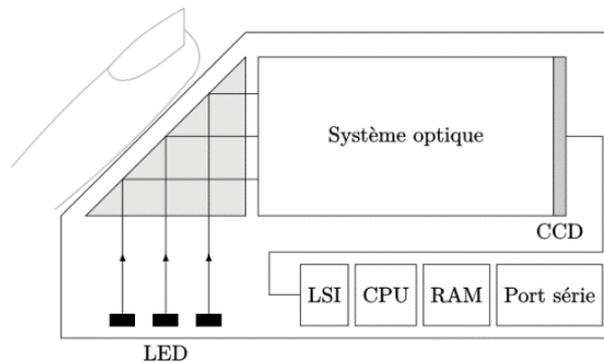


Figure 2 Principe d’un capteur optique d’empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d’un dioptre ( $\mathcal{D}$ ) et d’une lentille convergente ( $\mathcal{L}$ ) (figure 3). Si  $A$  est un point objet de l’empreinte digitale, alors on note  $A_1$  l’image de  $A$  à travers le dioptre ( $\mathcal{D}$ ) et  $A_1'$  celle de  $A_1$  à travers la lentille ( $\mathcal{L}$ ) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A_1'$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A_1'} \quad D = \overline{A A_1'} \quad p = \overline{O A_1} \quad p' = \overline{O A_1'}$$

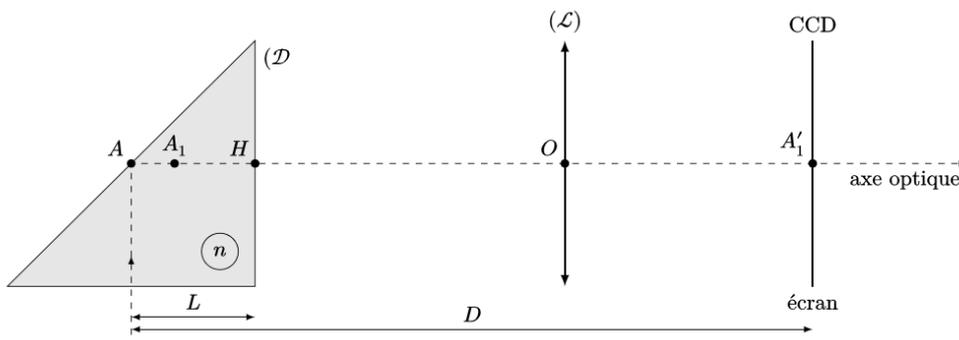


Figure 3 Schéma optique

## I.A – Optique géométrique

### I.A.1) Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale  $f'$  de la lentille et sa position, par exemple en déterminant  $p'$ . À cet effet, on donne  $n = 1,5$ ,  $L = 3$  cm,  $D = 10$  cm et le grandissement transversal  $\gamma = p'/p$  du système optique.

**Q 1.** Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre  $A$  et  $A_1$  par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit  $\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA'}$ .

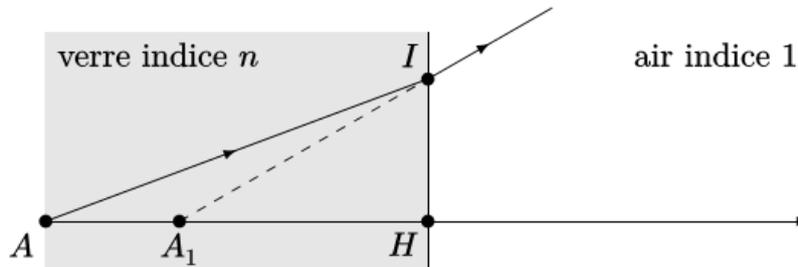


Figure 4

**Q 2.** Exprimer  $p$  et  $p'$  en fonction de  $D_1$  et de  $\gamma$ . Déterminer alors  $f'$  en fonction de  $D_1$  et de  $\gamma$  à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes :  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ .

**Q 3.** On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale  $f'$  d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance  $D_1$  d'un objet réel. En remarquant qu'il faut  $\gamma < 0$  pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport  $D_1/f'$  est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par  $f'$ .

**Q 4.** *Applications numériques.* On suppose  $\gamma = -2$ . À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?

**Q 5.** On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ( $|\gamma|$  maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur  $D_1$ . Dans quel sens faut-il faire varier  $f'$  ?

En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

### I.A.2) Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en  $A_1$  au lieu de  $A$ .

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne  $e = 30$   $\mu\text{m}$  et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de  $a = 100$   $\mu\text{m}$ . On note  $l_c$  la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe  $A_1$ , à l'écran CCD (figure 5).

Sur la figure 6, les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives  $M_1'$ ,  $M_2'$  et  $M_3'$  détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que l'image  $M_2'$  ne forma pas tout à fait une surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre  $\phi$ .

On note  $p'$  la distance entre la lentille et la surface du CCD et  $|p|$  avec  $p < 0$ , la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets  $M_1$  et  $M_3$ . On note alors  $\gamma = p'/p$  le grandissement entre les couples de points conjugués  $(M_1, M_1')$  et  $(M_3, M_3')$ . On a  $\gamma = -2$ .

**Q 6.** À quelle condition sur  $a$  et sur  $l_c$  peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommandez-vous ?

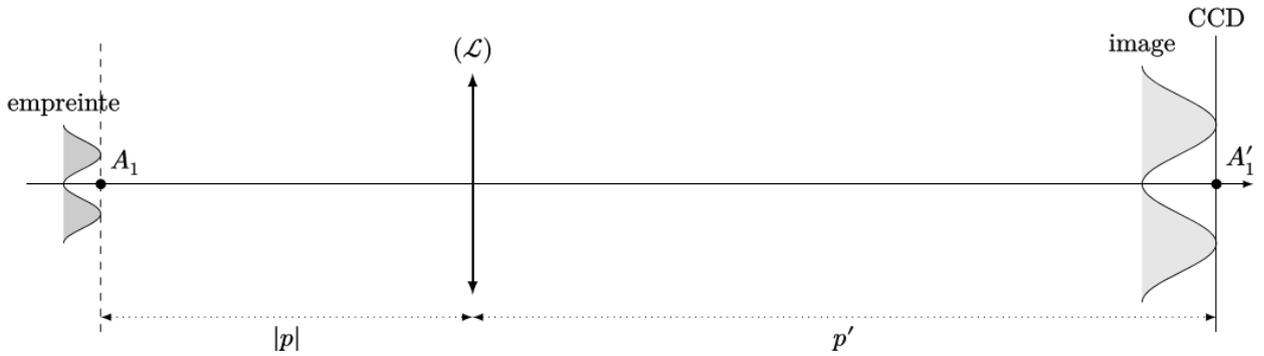


Figure 5

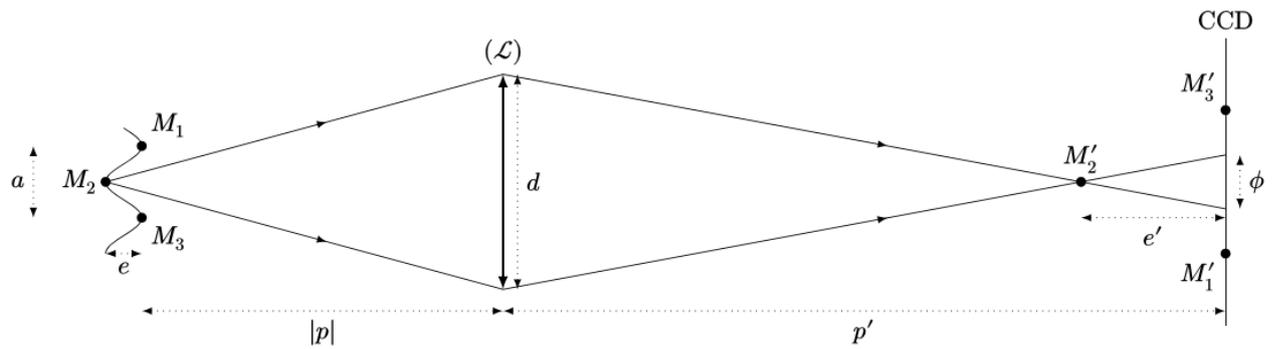


Figure 6 Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées. Le barème prend en compte le temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Q 7. On note  $d$  le diamètre de la monture de la lentille ( $\mathcal{L}$ ). Montrer que  $\phi = \frac{\gamma de}{p}$ , dans l'approximation  $e \ll |p|$ .

En notant  $e'$  la distance de  $M_2'$  à la surface du capteur CCD, on pourra montrer  $e' \approx \gamma^2 e$ .

Q 8. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre  $\phi$  de la tache excède la distance  $M_1'M_3'$ . Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre  $\phi$  de la monture ? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

### I.A.3) Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

Q 9. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

Q 10. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

Q 11. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que  $n = 1,5$ . (Pour éclairer le doigt, il faudrait que la lumière issue de la LED ressorte du prisme vers le doigt)

Dans le montage proposé, la lentille permettra d'obtenir l'image du doigt sur l'écran du CCD. Néanmoins, il faut aborder l'optique ondulatoire pour comprendre comment le doigt est éclairé au travers du prisme.