

ALGÈBRE LINÉAIRE

RAPPELS ET COMPLÉMENTS

B. Landelle

Table des matières

I	Espaces vectoriels	2
1	Sous-espaces vectoriels	2
2	Combinaisons linéaires	2
3	Sommes de sev	3
II	Dimension finie	4
1	Bases	4
2	Sous-espaces en dimension finie	4
III	Applications linéaires	5
1	Généralités	5
2	En dimension finie	7
IV	Matrices par blocs	8
1	Définitions, propriétés	8
2	Produits, déterminants	9
V	Endomorphismes remarquables	10
1	Homothéties	10
2	Projecteurs et symétries	11
3	Projecteurs et somme directe	13
VI	Matrices semblables	13
1	Changement de base	14
2	Définitions	14
3	Propriétés	14
VII	Sous-espaces stables	15
1	Définitions	15
2	Interprétation matricielle	15

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$ -ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

1 Sous-espaces vectoriels

Proposition 1. Soit $F \subset E$. On a F sev de E si et seulement si

$$0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall (x, y, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$$

Proposition 2. Une intersection de sev de E est un sev de E .

Définition 1. Soit $X \subset E$. On appelle espace engendré par X le sev noté $\text{Vect}(X)$ défini par

$$\text{Vect}(X) = \bigcap_{F \text{ sev } \supset X} F$$

Proposition 3. Soit $X \subset E$. Le sev $\text{Vect}(X)$ est le plus petit sev contenant X .

2 Combinaisons linéaires

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires de $\mathbb{K}$.

Définition 2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$ un élément de la forme $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ avec $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Proposition 4. Soit $(x_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de E . On a

$$\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$$

En particulier, pour $x \in E$, on a $\text{Vect}(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{K}\}$

et pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Définition 3. Soit $(x_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de E . C'est une famille libre si

$$\forall (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I \quad \alpha_i = 0$$

C'est une famille liée si $\exists (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \setminus \{0_{\mathbb{K}^I}\} \mid \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0_E$

Définition 4. On appelle droite vectorielle un sev de la forme $\text{Vect}(x)$ avec $x \in E \setminus \{0_E\}$ et plan vectoriel un sev de la forme $\text{Vect}(x, y)$ avec $(x, y) \in E^2$ libre.

Définition 5. Soit F sev de E . Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est génératrice de F si

$$F = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$$

Définition 6. Une base de E est une famille libre et génératrice de E .

Théorème 1. Tout vecteur de E se décompose comme une unique combinaison linéaire des vecteurs d'une base de E .

3 Sommes de sev

Proposition 5. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sev de E . La somme

$$\sum_{i=1}^p F_i = \left\{ \sum_{i=1}^p x_i, (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \right\}$$

est un sev de E contenant chacun des F_k .

Démonstration. Chaque sev F_i contient 0_E d'où $0_E = \sum_{i=1}^p 0_E \in \sum_{i=1}^p F_i$. Soit $\lambda \in K$ et x, y dans $\sum_{i=1}^p F_i$. On dispose de $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $\sum_{i=1}^p F_i$. Il vient

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^p \underbrace{(\lambda x_i + y_i)}_{\in F_i} \in \sum_{i=1}^p F_i$$

ce qui prouve que $\sum_{i=1}^p F_i$ est bien un sev de E . Par ailleurs, pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $x_k \in F_k$, avec $x_i = 0_E$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket \setminus \{k\}$, on a $x_k = \sum_{i=1}^p x_i \in \sum_{i=1}^p F_i$ et ceci vaut pour tout $x_k \in F_k$ d'où $F_k \subset \sum_{i=1}^p F_i$. $\square$

Définition 7. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sev de E . La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p F_i \quad \exists! (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \prod_{i=1}^p F_i \quad | \quad x = \sum_{i=1}^p x_i$$

On note $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ cette somme.

Proposition 6. Soient F, G sev de E . On a

$$F + G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}$$

Définition 8. Des sev F et G de E sont dits supplémentaires si $E = F \oplus G$.

Proposition 7. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sev de E . On a

$$\sum_{i=1}^p F_i = \bigoplus_{i=1}^p F_i \iff \forall (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \prod_{i=1}^p F_i \quad \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad x_i = 0_E$$

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisque $\sum_{i=1}^p 0_E = 0_E$ et qu'une telle décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ est unique. Réciproquement, soient $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $\prod_{i=1}^p F_i$ tels que $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i$. Il s'ensuit $\sum_{i=1}^p \underbrace{(x_i - y_i)}_{\in F_i} = 0_E$ d'où $x_i = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ce qui prouve l'unicité. $\square$

Proposition 8. Soit F sev de E et $F_1, \dots, F_p$ des sev de E de bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$.

On a
$$F = \bigoplus_{k=1}^p F_k \iff \biguplus_{k=1}^p \mathcal{B}_k \text{ est une base de } F$$

Démonstration. Pour $k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, on note $\mathcal{B}_k = (e_{i,k})_{i \in I_k}$. On a

$$\begin{aligned} F = \bigoplus_{k=1}^p F_k &\iff \forall x \in F \quad \exists! (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in \prod_{k=1}^p F_k \mid x = \sum_{k=1}^p x_k \\ &\iff \forall x \in F \quad \exists! \left((\alpha_{i,1})_{i \in I_1}, \dots, (\alpha_{i,p})_{i \in I_p} \right) \in \prod_{k=1}^p \mathbb{K}^{(I_k)} \mid x = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in I_k} \alpha_{i,k} e_{i,k} \right) \end{aligned}$$

□

Vocabulaire : Une base de $\bigoplus_{k=1}^p F_k$ obtenue par concaténation de bases de F_k est dite *adaptée* à la somme directe.

II Dimension finie

1 Bases

Définition 9. Un $\mathbb{K}$ -ev est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en base de E .

Théorème 3. Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie admet une base. Toutes les bases de cet espace sont finies et ont même cardinal appelé dimension.

Remarque : L'espace nul admet comme base la famille vide et est de dimension nulle.

Définition 10. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. Le rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est la dimension de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Théorème 4. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n . Une famille de vecteurs de E libre ou génératrice de cardinal égal à n est une base de E .

Proposition 9. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n avec $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{L}$ une famille de n vecteurs de E . On a

$$\mathcal{L} \text{ base de } E \iff \text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{L} \text{ inversible}$$

2 Sous-espaces en dimension finie

Proposition 10. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F sev de E . Alors, le sev F est de dimension finie avec $\dim F \leq \dim E$.

Proposition 11. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F, G deux sev de E . On a

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \iff F = G$$

Théorème 5. Tout sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie admet un supplémentaire.

Théorème 6 (Formule de Grassman). Soient F et G des sev de dimension finie d'un $\mathbb{K}$ -ev E . On a

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Théorème 7. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F et G des sev de E . On a

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F + G = E \end{cases} \\ &\iff \exists \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G \text{ bases respectives de } F, G \mid \mathcal{B}_F \uplus \mathcal{B}_G \text{ base de } E \end{aligned}$$

Théorème 8. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sev de dimensions finies de E . On a

$$\dim \sum_{k=1}^p F_k \leq \sum_{k=1}^p \dim F_k$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration. On pose

$$\Phi: \begin{cases} \prod_{k=1}^p F_k \longrightarrow \sum_{k=1}^p F_k \\ (x_k)_{1 \leq k \leq p} \longmapsto \sum_{k=1}^p x_k \end{cases}$$

D'après le théorème du rang, il vient

$$\dim \prod_{k=1}^p F_k = \text{rg}(\Phi) + \dim \text{Ker } \Phi \geq \dim \text{rg}(\Phi)$$

On note $(e_{i,k})_{i \in [1; m_k]}$ une base de F_k pour $k \in [1; p]$. Ainsi, pour $x \in \prod_{k=1}^p F_k$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{m_1} x_{i,1} (e_{i,1}, 0, \dots) + \sum_{i=1}^{m_2} x_{i,2} (0, e_{i,2}, 0, \dots) + \dots$$

La famille exhibée est génératrice et clairement libre et forme donc une base du produit $\prod_{k=1}^p F_k$.

On en déduit $\dim \prod_{k=1}^p F_k = \sum_{k=1}^p \dim F_k$ et l'inégalité s'ensuit. Enfin, on a clairement $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ si et seulement si la somme est directe le cas d'égalité s'en déduit. $\square$

Remarque : On peut aussi procéder par récurrence ou en considérant des bases $\mathcal{B}_k$ des F_k en remarquant que leur concaténation engendre $\sum_{k=1}^p F_k$.

III Applications linéaires

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev.

1 Généralités

Définition 11. Une application $u : E \rightarrow F$ est linéaire si $u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$ pour tout $(x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de ces applications. C'est un $\mathbb{K}$ -ev.

Proposition 12. Une composée d'applications linéaires est linéaire.

Proposition 13. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Le noyau $\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\})$ et l'image $\text{Im } u = u(E)$ sont des sev respectifs de E et de F .

Définition 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si u est bijective, on dit que u est un isomorphisme. Si $E = F$, on note simplement $u \in \mathcal{L}(E)$ et on dit que u est un endomorphisme de E . Si $E = F$ et u bijective, on note $u \in \text{GL}(E)$ et on dit que u est un automorphisme.

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La suite des noyaux itérés $(\text{Ker } u^k)_k$ est croissante et la suite des images itérées $(\text{Im } u^k)_k$ est décroissante.

Proposition 14. L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Proposition 15. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ isomorphismes. On a $v \circ u$ isomorphisme avec $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Théorème 9. L'ensemble $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Proposition 16. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$u \text{ injective} \iff \text{Ker } u = \{0_E\}$$

Proposition 17. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$$v \circ u = 0 \iff \text{Im } u \subset \text{Ker } v$$

Remarque : On peut avoir $\text{Im } u = \text{Ker } u$. Par exemple en considérant $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 18. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.

Proposition 19. Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base par cette application.

Proposition 20. Soit $E_1, \dots, E_p$ des sev de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Démonstration. Supposons l'existence d'une telle application u . Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^p x_i$ son unique décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^p E_i$. Alors, il vient

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = \sum_{i=1}^p u(x_i) = \sum_{i=1}^p u_i(x_i)$$

ce qui prouve l'unicité d'une telle application sous réserve d'existence. On considère alors cette application $u : E \rightarrow F$ qui à $x = \sum_{i=1}^p x_i$ associe $\sum_{i=1}^p u_i(x_i)$. Elle est bien définie et pour $(x, y) \in E^2$

et $\lambda \in \mathbb{K}$, en considérant les décompositions de x et y dans $\bigoplus_{i=1}^p E_i$, on a

$$u(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^p u_i(\lambda x_i + y_i) = \sum_{i=1}^p (\lambda u_i(x_i) + u_i(y_i)) = \lambda u(x) + u(y)$$

et $u|_{E_i}(x_i) = u(x_i) = u_i(x_i)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. □

Définition 13. Une forme linéaire est une application de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Proposition 21. Soit H sev strict de E et $x \in E \setminus H$. On a

$$H \text{ hyperplan} \iff E = \text{Vect}(x) \oplus H$$

2 En dimension finie

Définition 14. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. Le rang de u est $\dim \text{Im } u$.

Proposition 22. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimension finie. On a

$$\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$$

Proposition 23. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimensions finies non nulles, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ base de E et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de F . On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ avec $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i$ pour tout $j \in \llbracket 1;p \rrbracket$. On définit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} u$. Pour $(x, y) \in E \times F$ et $X = \text{mat}_{\mathcal{B}_E} x$, $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}_F} y$, on a

$$y = u(x) \iff Y = AX$$

On a $\text{rg}(u) = \text{rg}(A)$. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $u : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto AX$ est canoniquement associée à A (en confondant matrice colonne et vecteur).

Proposition 24. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ bases respectives de E, F et G , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G} v \circ u = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G} v \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} u$$

Proposition 25. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie, $v \in \text{GL}(E)$ et $w \in \text{GL}(F)$. On a

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(w \circ u)$$

Proposition 26. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E et F de dimension finie. On a

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$$

Théorème 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. L'application u induit un isomorphisme d'un supplémentaire S de $\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$.

Théorème 11 (Théorème du rang). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. On a

$$\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u$$

 **Remarque :** Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le théorème du rang se décline ainsi :

$$p = \dim \text{Ker } A + \text{rg}(A)$$

En effet, les quantités $\text{rg}(A)$ et $\dim \text{Ker } A$ désignent respectivement $\text{rg}(u)$ et $\dim \text{Ker } u$ avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A .

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Les suites $(\text{Ker } u^k)_k$ et $(\text{Im } u^k)_k$ sont strictement monotones puis simultanément stationnaires. Si l'espace E est de dimension infinie et qu'il existe k entier tel que $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$ (ou de même avec les images), le résultat annoncé vaut encore.

Théorème 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension finie et $\mathcal{B}_E$ base de E . On a
 u bijective $\iff u$ injective $\iff u$ surjective $\iff \text{rg}(u) = \dim E \iff u(\mathcal{B}_E)$ base de F
Si $E = F$, on peut ajouter $u \in \text{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$

Théorème 13. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $x \in E$, on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec x_i les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Pour H sev de E ,
on a H hyperplan $\iff \exists (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} \mid x \in H \iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$

Application : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E . Pour F sev strict de E , il existe $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des scalaires non tous nuls tels que

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in F \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

IV Matrices par blocs

1 Définitions, propriétés

Définition 15. Soient $A \in \mathcal{M}_{n_1, p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1, p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2, p_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n_2, p_2}(\mathbb{K})$. On définit la matrice par blocs $M \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ avec $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2$ par

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

Interprétation géométrique : Soient E, F des $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles avec $\mathcal{B}_E$ base de E , $\mathcal{B}_F$ base de F et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{E_1} \uplus \mathcal{B}_{E_2}$, $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_{F_1} \uplus \mathcal{B}_{F_2}$, $E_1 = \text{Vect}(\mathcal{B}_{E_1})$, $E_2 = \text{Vect}(\mathcal{B}_{E_2})$, $F_1 = \text{Vect}(\mathcal{B}_{F_1})$ et $F_2 = \text{Vect}(\mathcal{B}_{F_2})$ et $p_1 = \text{Card } \mathcal{B}_{E_1}$, $p_2 = \text{Card } \mathcal{B}_{E_2}$, $n_1 = \text{Card } \mathcal{B}_{F_1}$ et $n_2 = \text{Card } \mathcal{B}_{F_2}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} u = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ avec $A \in \mathcal{M}_{n_1, p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1, p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2, p_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n_2, p_2}(\mathbb{K})$ si et seulement si

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}_{E_1}, \mathcal{B}_{F_1}} (\pi_1 \circ u|_{E_1}) \quad B = \text{mat}_{\mathcal{B}_{E_2}, \mathcal{B}_{F_1}} (\pi_1 \circ u|_{E_2}) \dots$$

où $\pi_1 = p_{F_1, F_2}$ et $\pi_2 = p_{F_2, F_1}$.

Remarque : Plus généralement, on peut définir une matrice par blocs $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ avec q partitions de lignes et s de colonnes par

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{q,1} & A_{q,2} & \dots & A_{q,s} \end{array} \right)$$

Proposition 27. Soient M_1, M_2 dans $\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ matrices par blocs avec

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right)$$

où les blocs A_i sont de même taille et de même pour les blocs B_i, C_i et D_i . Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda M_1 + M_2 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_1 + A_2 & \lambda B_1 + B_2 \\ \hline \lambda C_1 + C_2 & \lambda D_1 + D_2 \end{array} \right)$$

Démonstration. Immédiate □

Proposition 28. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ matrice par blocs. On a

$$M^\top = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array} \right)$$

Démonstration. Par distinction de cas (fastidieux). □

Définition 16. On appelle matrice triangulaire supérieure par blocs une matrice de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,r} \\ \hline 0 & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_{r,r} \end{array} \right)$$

avec les $A_{i,i}$ des matrices carrées. On appelle matrice diagonale par blocs une matrice de la forme

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$$

avec les A_i des matrices carrées.

Remarque : De la même façon, on définit une matrice triangulaire inférieure par blocs.

2 Produits, déterminants

Proposition 29 (Produit par blocs). Soit $M_1 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ matrices par blocs avec

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right)$$

de tailles de blocs respectives

$$\frac{n_1, p_1}{n_2, p_1} \mid \frac{n_1, p_2}{n_2, p_2} \quad \text{et} \quad \frac{p_1, q_1}{p_2, q_1} \mid \frac{p_1, q_2}{p_2, q_2}$$

Alors, on a l'égalité $M_1 M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ \hline C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{array} \right)$

Démonstration. On pose $u : X \in \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto M_1 X$ et $v : X \in \mathbb{K}^q \rightarrow \mathbb{K}^p, X \mapsto M_2 X$ (on confond colonne et matrice colonne). Pour $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ par blocs de taille $q_1 + q_2$, on a

$$u \circ v(X) = u \left(\frac{A_2 X_1 + B_2 X_2}{C_2 X_1 + D_2 X_2} \right) = \left(\frac{(A_1 A_2 + B_1 C_2) X_1 + (A_1 B_2 + B_1 D_2) X_2}{(C_1 A_2 + D_1 C_2) X_1 + (C_1 B_2 + D_1 D_2) X_2} \right)$$

et comme $\text{mat}_{\mathcal{C}_q, \mathcal{C}_n}(u \circ v) = \text{mat}_{\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_n} u \times \text{mat}_{\mathcal{C}_q, \mathcal{C}_p} v$ avec les familles $\mathcal{C}_q$, $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_n$ bases respectives de $\mathbb{K}^q$, $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on en déduit le résultat attendu. □

Remarque : Le résultat se généralise pour des matrices avec plus de quatre blocs et des dimensions compatibles pour le produit des blocs.

Proposition 30. Soient $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n = r + s$ la matrice par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$. On a

$$\det(M) = \det(A) \det(C)$$

Démonstration. On observe

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_s \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

et par récurrence sur les tailles des blocs identités (en développant respectivement selon la première et la dernière ligne), on montre

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = \det(C) \quad \text{et} \quad \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_s \end{array} \right) = \det(A)$$

Le résultat suit. $\square$

Remarque : Par récurrence sur le nombre de blocs diagonaux, on en déduit que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (et donc *a fortiori* diagonale par blocs) est le produit des déterminants des blocs.

Définition 17. Soient A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On appelle transvections par blocs la transformation de $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ en $\left(\begin{array}{c|c} A & B + \lambda A \\ \hline C & D + \lambda C \end{array} \right)$ ou $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C + \lambda A & D + \lambda B \end{array} \right)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 31. Une transvection par blocs conserve le déterminant.

Démonstration. On reprend les notations de la définition 17. On observe

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B + \lambda A \\ \hline C & D + \lambda C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & \lambda I_r \\ \hline 0 & I_r \end{array} \right)$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C + \lambda A & D + \lambda B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \lambda I_r & I_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

Le résultat suit par passage au déterminant. $\square$

V Endomorphismes remarquables

1 Homothéties

Définition 18. On appelle homothétie de E tout élément de $\text{Vect}(\text{id}) = \{\lambda \text{id}, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Proposition 32. Une homothétie commute avec tout endomorphisme de E .

Démonstration. Immédiate. $\square$

2 Projecteurs et symétries

Définition 19. Soient F, G sev de E avec $E = F \oplus G$. On appelle projection sur F parallèlement à G l'application notée $p_{F,G}$ définie par

$$p_{F,G} : E \rightarrow E, x = a + b \mapsto a \quad \text{avec} \quad (a, b) \in F \times G$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application notée $s_{F,G}$ définie par

$$s_{F,G} : E \rightarrow E, x = a + b \mapsto a - b \quad \text{avec} \quad (a, b) \in F \times G$$

Remarque : De telles applications sont bien définies par existence et unicité du couple $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.

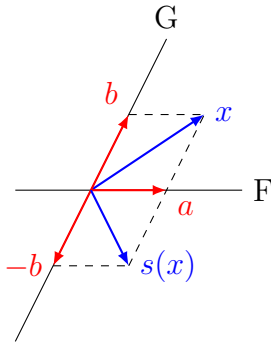


FIGURE 1 – Symétrie

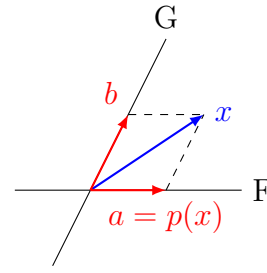


FIGURE 2 – Projection

Proposition 33. Soient F, G des sev supplémentaires de E . On a $p_{F,G}$ et $s_{F,G}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Définition 20. On appelle projecteur un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p^2 = p$ et involution linéaire un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $s^2 = \text{id}$.

Théorème 14. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence

$$p \text{ projecteur} \iff p \text{ projection}$$

Si p est un projecteur, on a $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Démonstration. Le sens indirect est immédiat. Réciproquement, pour p projecteur, on vérifie l'égalité $\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{0_E\}$ puis pour $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker } p}$$

ce qui prouve $E = \text{Im } p + \text{Ker } p$ d'où $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et $p = p_{\text{Im } p, \text{Ker } p}$. $\square$

Remarques : (1) Cette décomposition unique d'un $x \in E$ s'obtient par une analyse/synthèse. (2) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, la décomposition $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ n'est pas caractéristique d'un projecteur. En effet, pour $p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur, la décomposition vaut pour tout $f = \alpha p$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Proposition 34. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$p \text{ projecteur} \iff \text{id} - p \text{ est le projecteur}$$

et dans ce cas $\text{Im } p = \text{Ker } (\text{id} - p)$ et $\text{Ker } p = \text{Im } (\text{id} - p)$

On dit que p et $\text{id} - p$ sont des projecteurs associés.

Démonstration. La première équivalence est immédiate. Puis, pour $x \in E$ et p projecteur, on a

$$x = p(x) + x - p(x) = \underbrace{(\text{id} - q)(x)}_{\in \text{Ker } q} + \underbrace{q(x)}_{\in \text{Im } q} \quad \text{avec } q = \text{id} - p$$

et correspondance terme à terme dans l'égalité. Par unicité de la décomposition dans $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et $\text{Ker } q \oplus \text{Im } q$, on en déduit que le projecteur q projette sur $\text{Ker } p$ parallèlement à $\text{Im } p$. $\square$

Proposition 35. *Le seul projecteur injectif de E est l'identité.*

Démonstration. Pour $x \in E$, on a $p(p(x)) = p(x)$ d'où $p(x) = x$ par injectivité et le résultat suit. $\square$

Théorème 15. *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence*

$$s \text{ symétrie} \iff s^2 = \text{id}$$

Si $s^2 = \text{id}$, alors on a $E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id})$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id})$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Réciproquement, pour s involution linéaire, on vérifie l'égalité $\text{Ker}(s - \text{id}) \cap \text{Ker}(s + \text{id}) = \{0_E\}$ puis pour $x \in E$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(\text{id} + s)(x)}_{\in \text{Ker}(\text{id} - s)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\text{id} - s)(x)}_{\in \text{Ker}(\text{id} + s)}$$

ce qui prouve $E = \text{Ker}(s - \text{id}) + \text{Ker}(s + \text{id})$ d'où $E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id})$ et $s = {}^s\text{Ker}(s - \text{id}), \text{Ker}(s + \text{id})$. $\square$

Remarques : 1. Cette décomposition unique d'un $x \in E$ s'obtient par une analyse/synthèse.
2. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, la décomposition $E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{id})$ est caractéristique d'une symétrie.

Vocabulaire : Il est fréquent de confondre *projection* et *projecteur*, *symétrie* et *involution linéaire*.

Proposition 36. *Si s est une symétrie, alors $p = \frac{1}{2}(\text{id} + s)$ est la projection sur $\text{Ker}(s - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id})$. Réciproquement, si p est un projecteur de E , alors $s = 2p - \text{id}$ est la symétrie par rapport à $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$. Le projecteur p et la symétrie s sont dits associés.*

Démonstration. Soit s symétrie. Pour $x \in E$ avec $x = a + b$ et $(a, b) \in \text{Ker}(s - \text{id}) \times \text{Ker}(s + \text{id})$,

on a
$$s(x) = a - b \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{1}{2}(\text{id} + s)(x) = a$$

d'où le résultat pour p . Réciproquement, si p est un projecteur, pour $x \in E$ avec $x = a + b$ et $(a, b) \in \text{Im } p \times \text{Ker } p$, on a

$$p(x) = a \quad \text{et} \quad (2p - \text{id})(x) = a - b$$

d'où le résultat pour s . $\square$

Définition 21. Soit p un projecteur et s une symétrie. Une base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation d'une base de $\text{Im } p$ et d'une base de $\text{Ker } p$ est dite adaptée à p . Si E est de dimension finie, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} p = \text{diag}(I_r, 0)$. De même, une base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation d'une base de $\text{Ker}(s - \text{id})$ et d'une base de $\text{Ker}(s + \text{id})$ est dite adaptée à s . Si E est de dimension finie, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} s = \text{diag}(I_r, -I_s)$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} p = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array} \right) \quad \text{mat}_{\mathcal{B}} s = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array} \right)$$

3 Projecteurs et somme directe

Définition 22. Soient $F_1, \dots, F_r$ des sev de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$. Pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on définit p_k le projecteur de E sur F_k parallèlement à $\bigoplus_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus \{k\}} F_j$. La famille de projecteurs $(p_k)_{k \in \llbracket 1; r \rrbracket}$ est dite associée à la somme directe $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$.

Remarque : Pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, le projecteur p_k est bien défini puisqu'on a

$$E = F_k \oplus \left(\bigoplus_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus \{k\}} F_j \right)$$

Théorème 16. Soit $(p_k)_{k \in \llbracket 1; r \rrbracket}$ une famille de projecteurs associée à la somme directe $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$. On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad p_i \circ p_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^r p_k = \text{id}$$

Démonstration. Soit $i \neq j$. Comme $\text{Im } p_j = F_j \subset \text{Ker } p_i$, il s'ensuit $p_i \circ p_j = 0$ puis, pour $x = \sum_{i=1}^r x_i$, on a

$$\sum_{k=1}^r p_k \left(\sum_{i=1}^r x_i \right) = \sum_{1 \leq k, i \leq r} p_k(x_i)$$

Pour $k \neq i$, comme $x_i \in F_i \subset \text{Ker } p_k$, on a $p_k(x_i) = 0$ puis $p_k(x_k) = x_k$ puisque $x_k \in F_k = \text{Im } p_k = \text{Ker}(\text{id} - p_k)$ d'où

$$\sum_{k=1}^r p_k(x) = \sum_{k=1}^r p_k(x_k) = \sum_{k=1}^r x_k = x$$

autrement dit $\sum_{k=1}^r p_k = \text{id}$. □

VI Matrices semblables

Dans ce qui suit, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à n .

1 Changement de base

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ des bases de E , $P = \text{mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} \text{id}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Proposition 37. 1. $P = \text{mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} \text{id}$ (attention à l'ordre)

2. $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

3. $P^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$

4. $\text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_3 = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2 \times \text{mat}_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_3$

Proposition 38. Soit $x \in E$, $X_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} x$ et $X_2 = \text{mat}_{\mathcal{B}_2} x$, alors

$$X_1 = PX_2$$

Proposition 39. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} u$, $A_2 = \text{mat}_{\mathcal{B}_2} u$, alors

$$A_1 = PA_2P^{-1}$$

2 Définitions

Définition 23. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont dites semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 40. La similitude (i.e. le fait que deux matrices soient semblables) est une relation d'équivalence.

Démonstration. Sans difficulté, on vérifie que la relation est réflexive, symétrique, transitive. $\square$

3 Propriétés

Proposition 41. Toute matrice semblable à une matrice d'homothétie est égale à cette matrice.

Démonstration. Immédiate en écrivant le produit matriciel. $\square$

Théorème 17. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ avec $\text{mat}_{\mathcal{C}} u_A = A$ où $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A, B semblables ;
2. Il existe un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ bases de E tels que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} u$ et $B = \text{mat}_{\mathcal{B}_2} u$;
3. Il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{K}^n$ telle $\text{mat}_{\mathcal{B}} u_A = B$;

Démonstration. On a clairement (3) $\implies$ (2) avec $E = \mathbb{K}^n$, $u = u_A$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$. Le sens (2) $\implies$ (1) est immédiat d'après les formules de changement de bases. Supposons A et B semblables. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Notons $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et posons $\mathcal{B} = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$ définie par : pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$. Alors, on a $\text{mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B} = P$ matrice inversible donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et d'après les formules de changement de base, il vient

$$B = P^{-1}AP = \text{mat}_{\mathcal{B}} u_A$$

ce qui prouve (1) $\implies$ (3). $\square$

Corollaire 1. Deux matrices semblables ont même trace, même rang, même déterminant.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème précédent. $\square$

Remarque : La contraposée est très utile. La réciproque est fausse. Considérer I_n et $I_n + E_{1,n}$ pour $n \geq 2$.

Exemple : Étudier la similitude des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si les matrices A et B sont semblables, notant $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ canoniquement associé à A, on aurait

$$2 = \operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg}(u_A - \operatorname{id}) = \operatorname{rg}(B - I_3) = 1$$

ce qui est absurde. Soit $u_B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ canoniquement associé à B. Dans $\mathcal{B} = (e_2, e_1, e_3)$, on a $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u_B = C$ d'où la similitude de C et B.

Remarque : Il existe un résultat plus général : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a A semblable à $A^\top$. Ce résultat est hors-programme et difficile à établir (requiert la réduction de Jordan ou la décomposition de Frobenius).

VII Sous-espaces stables

1 Définitions

Définition 24. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E. Le sev F est dit stable par u si $u(F) \subset F$, i.e. $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$.

Exemples : Les sev triviaux $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme, le noyau et l'image (éventuellement triviaux) d'un endomorphisme sont stables par cet endomorphisme, ...

Définition 25. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u. La restriction de u à F notée $u|_F$ induit un endomorphisme de F noté $u_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$ appelé endomorphisme induit par u sur F.

2 Interprétation matricielle

Proposition 42. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E avec $\dim F = m$, $\mathcal{B}_F$ une base de F complétée en $\mathcal{B}$ base de E. On a

$$F \text{ stable par } u \iff \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, on a $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F} u_F$.

Démonstration. On a $u(F) \subset F \iff u(\mathcal{B}_F) \in F^m = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_F)^m$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 43. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $F_1, \dots, F_r$ des sev de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$,

$\mathcal{B} = \biguplus_{k=1}^r \mathcal{B}_k$ une base adaptée à cette décomposition et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les sev F_k sont stables par u si et seulement si

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \text{diag}(A_1, \dots, A_r) \quad \text{avec} \quad A_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad m_k = \dim F_k$$

Dans ce cas, on a $A_k = \text{mat}_{\mathcal{B}_k} u|_{F_k}$ pour tout $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

Démonstration. On a

$$\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad u(F_k) \subset F_k \iff \forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad u(\mathcal{B}_k) \in F_k^{m_k} = \text{Vect}(\mathcal{B}_k)^{m_k}$$

d'où le résultat.

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

□