

Feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in GL(E)$.

Montrer $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$ et $E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$

Corrigé : On a $E = \text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g \implies \text{Im } f + \text{Im } g = E$

Puis, d'après la formule de Grassmann, on a

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \geq \dim \text{Im } f + \text{Im } g = \dim E$$

Par ailleurs, comme $g \circ f = 0$, alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ puis le théorème du rang donne

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker } f \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

En particulier, on a $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim \text{Im } f + \text{Im } g$

et toujours avec la formule de Grassmann, on conclut

$$\boxed{\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E \quad \text{et} \quad E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g}$$

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim E$

2. Montrer $2 \text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)$

Corrigé : 1. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker } f$$

Or $f^3 = 0 \iff f \circ f^2 = 0 \iff \text{Im } f^2 \subset \text{Ker } f$

d'où $\text{rg}(f^2) \leq \dim \text{Ker } f$

Ainsi

$$\boxed{\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim E}$$

2. On a $\text{Im } f|_{\text{Im } f} = \{f(x), x \in \text{Im } f\} = \{f^2(t), t \in E\} = \text{Im } f^2$

et $\text{Ker } f|_{\text{Im } f} = \{x \in \text{Im } f \mid f(x) = 0\} = \text{Ker } f \cap \text{Im } f$

D'après le théorème du rang appliqué à $f|_{\text{Im } f}$, on a

$$\dim \text{Im } f = \text{rg}(f|_{\text{Im } f}) + \dim \text{Ker } f|_{\text{Im } f} = \text{rg}(f^2) + \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f$$

et $\text{Im } f^2 \subset \text{Ker } f \cap \text{Im } f$

D'où

$$\boxed{2 \text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)}$$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

2. Justifier que $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ sans utiliser $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Corrigé : 1. La famille $\mathcal{B}$ étant une base, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe une unique forme linéaire e_i^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ et par conséquent

Il existe une unique famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$ telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

2. Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il vient

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \right) (e_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,k} = \alpha_k = 0$$

ce qui prouve la liberté de la famille. Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Sans difficulté, on vérifie que la forme $f - \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^*$ s'annule sur la base $\mathcal{B}$ ce qui prouve sa nullité et donc le caractère générateur de $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ pour $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On conclut

La famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Remarque : La base $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est appelée *base duale* de la base $\mathcal{B}$. On en déduit notamment l'égalité fondamentale

$$\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E . On pose

$$\Phi: \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *antéduale* à $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Corrigé : 1. On a clairement $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$. Supposons l'application Φ non surjective. Il existe alors un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ contenant $\text{Im } \Phi$ ce qui équivaut à l'existence de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaires non tous nuls tels que

$$\forall x \in E \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) = 0_E$$

autrement dit $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = 0$ et contredit la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Par conséquent, l'application Φ est surjective entre deux espaces de même dimension d'où

L'application Φ est un isomorphisme.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\varepsilon_j \in E$ tel que $\Phi(\varepsilon_j) = e_j$, c'est-à-dire $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On conclut

Il existe une base antéduale à $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in GL(E)$ et p projecteur de E tel que $u = v \circ p$.

Corrigé : Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$. On dispose de P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_r Q$ d'où $A = PQQ^{-1}J_r Q$. On a $PQ \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q^{-1}J_r Q$ semblable à J_r ce qui prouve qu'il s'agit d'une matrice de projection. Considérant v et p dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\text{mat}_{\mathcal{B}} v = PQ$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}} p = Q^{-1}J_r Q$, on conclut

Il existe $v \in GL(E)$ et p projecteur tel que $u = v \circ p$.

Variante : Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ et S' un supplémentaire de $\text{Im } u$. Les sev $\text{Ker } u$ et S' ont même dimension donc sont isomorphes. Soit $\varphi : \text{Ker } u \rightarrow S'$ un tel isomorphisme. On note p le projecteur sur S parallèlement à $\text{Ker } u$ et on pose $v = u \circ p + \varphi \circ (\text{id} - p)$. On a clairement $v \circ p = u$ puis, pour $x \in E$

$$\begin{aligned} v(x) = 0_E &\iff \underbrace{u(p(x))}_{\in \text{Im } u} + \underbrace{\varphi \circ (\text{id} - p)(x)}_{\in S'} = 0_E \\ &\implies u(p(x)) = 0_E \quad \text{et} \quad \varphi \circ (\text{id} - p)(x) = 0_E \\ v(x) = 0_E &\implies p(x) \in \text{Ker } u \quad \text{et} \quad (\text{id} - p)(x) = 0_E \end{aligned}$$

Il en résulte que $p(x) = 0_E$ et $x - p(x) = 0_E$ d'où $x = 0_E$. Comme v est un endomorphisme injectif en dimension finie, on conclut

Il existe $v \in GL(E)$ et p projecteur tel que $u = v \circ p$.

Exercice 6 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } A = 1$ et $\text{Tr}(A) = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

Corrigé : On a $A^2 = \text{Tr}(A)A$ (résultat à savoir redémontrer) d'où $A^2 = 0$. Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A . D'après le théorème du rang, on a $\dim \text{Ker } u = n - 1$. Soit $\varepsilon_1 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\text{Vect}(\varepsilon_1) = \text{Im } u$. Il existe $\varepsilon_n \in E$ tel que $u(\varepsilon_n) = \varepsilon_1$ d'où $u(\varepsilon_1) = u^2(\varepsilon_n) = 0_E$. On complète ensuite (ε_1) en $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ base de $\text{Ker } u$. La famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ ainsi construite est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i = 0_E$. On applique u et il vient $\alpha_n \varepsilon_1 = 0_E$ d'où $\alpha_n = 0$ puis la nullité des autres α_i par liberté de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$. La famille $\mathcal{B}$ est libre, de cardinal égal à $\dim E$ ce qui en fait donc une base et on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = E_{1,n}$. On conclut

Les matrices A et $E_{1,n}$ sont semblables.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul.

1. Soient u, v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \dim \operatorname{Ker} u$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

(a) Montrer que la suite $(\operatorname{Ker} u^k)_k$ croît strictement puis stationne.

(b) Établir
$$\frac{n}{p} \leq \dim \operatorname{Ker} u \leq n - p + 1$$

Corrigé : 1. En appliquant le théorème du rang à $u|_{\operatorname{Im} v}$, il vient

$$\operatorname{rg}(v) = \operatorname{rg}(u \circ v) + \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$$

D'où

$$\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \dim \operatorname{Ker} u$$

2.(a) La suite $(\operatorname{Ker} u^k)_k$ est clairement croissante et stationnaire puisque $u^k = 0$ pour tout $k \geq p$. Supposons $\operatorname{Ker} u^\ell = \operatorname{Ker} u^{\ell+1}$ avec $\ell < p$ et notons $\mathcal{P}(k) : \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k \geq \ell$. Si $x \in \operatorname{Ker} u^{k+2}$, on a $u(x) \in \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$ d'où $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$ ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$ vraie. Par conséquent, la suite $(\operatorname{Ker} u^k)_k$ stationne à partir de $\ell < p$ et $\operatorname{Ker} u^\ell = \operatorname{Ker} u^p = E$ ce qui est absurde par choix de p , ordre de nilpotence. Ainsi

$$\{0_E\} = \operatorname{Ker} u^0 \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} u^p = E$$

2.(b) D'après le résultat de la question 1, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1}) \leq \dim \operatorname{Ker} u$$

Par sommation télescopique, on trouve

$$\sum_{k=0}^{p-1} [\operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1})] = \operatorname{rg}(u^0) - \operatorname{rg}(u^p) = \operatorname{rg}(\operatorname{id}) = n \leq p \dim \operatorname{Ker} u$$

et
$$\sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{[\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} u^k]}_{\geq 1} = \dim \operatorname{Ker} u^p - \dim \operatorname{Ker} u = n - \dim \operatorname{Ker} u \geq p - 1$$

On conclut

$$\frac{n}{p} \leq \dim \operatorname{Ker} u \leq n - p + 1$$

Remarque : On peut aussi formuler ce résultat comme un encadrement liant rang d'un endomorphisme nilpotent avec son ordre de nilpotence

$$p - 1 \leq \operatorname{rg}(u) \leq n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 8 (****)

Soit n entier non nul et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\operatorname{rg} M = 1$, alors $M^2 = \operatorname{Tr}(M)M$.

Dans ce qui suit, on suppose que M vérifie la relation $M^2 = \operatorname{Tr}(M)M$.

2. Si $\operatorname{Tr}(M) \neq 0$, montrer que $\operatorname{rg}(M) = 1$. On pourra considérer $A = \frac{1}{\lambda}M$ avec $\lambda = \operatorname{Tr}(M)$.

3. Si $\text{Tr}(M) = 0$, décrire les classes de similitude de M .

Corrigé : 1. Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X | \dots | y_n X) = XY^\top$ avec Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Puis, avec l'associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = (XY^\top)(XY^\top) = X \underbrace{(Y^\top X)}_{\in \mathbb{K}} Y^\top = (Y^\top X)M$$

Or, d'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(XY^\top) = \text{Tr}(Y^\top X) = Y^\top X$$

Ainsi

$$M^2 = \text{Tr}(M)M$$

2. On suppose $\text{Tr}(M) \neq 0$ et on note $\lambda = \text{Tr}(M)$ et $A = \frac{1}{\lambda}M$. On observe

$$A^2 = \frac{1}{\lambda^2}M^2 = \frac{1}{\lambda^2}\lambda M = A$$

La matrice A est donc matrice de projecteur. Or, pour un projecteur, en considérant une base adaptée à celui-ci, on obtient que son rang est égal à sa trace et on a clairement $\text{Tr}(A) = 1$. On en déduit $\text{rg}(A) = 1$ et pour $M = \lambda A$ avec $\lambda \neq 0$, on conclut

$$\boxed{\text{Si } M^2 = \text{Tr}(M)M \text{ et } \text{Tr}(M) \neq 0, \text{ alors } \text{rg } M = 1.}$$

3. On suppose désormais $\text{Tr}(M) = 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M . On a $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\text{Im } u$ que l'on complète en $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ base de $\text{Ker } u$ ($q \geq r$). Puis, pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe $\varepsilon_{q+i} \in E$ tel que $\varepsilon_i = u(\varepsilon_{q+i})$. On a $q + r = n$ d'après le théorème du rang. Notons $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et montrons que c'est une famille libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i = 0_E$. On applique u et il vient

$$u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i\right) = \sum_{i=q+1}^n \alpha_i u(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_{q+i} \varepsilon_i = 0_E$$

On en déduit $\alpha_{q+1} = \dots = \alpha_n = 0$ puis, par liberté de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$, on obtient la nullité des autres coefficients. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre de cardinal n ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base de E et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = K_r \quad \text{avec} \quad K_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad 2r \leq r + q = n$$

$$\boxed{\text{Si } M^2 = 0, \text{ alors } M \text{ est semblable avec } K_r \text{ avec } 2r \leq n.}$$

Remarque : Dans le cas où $\text{Tr}(M) = 0$, le rang n'est donc pas nécessairement 1 mais seulement $\leq n/2$.