ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$
2. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$
3. $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$
4. $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$

Exercice 2 (*)

Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev et f, g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$ avec $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, g$ de dimension finie. Montrer

$$|\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(g)| \leqslant \mathrm{rg}\,(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$$

Exercice 3 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) = \dim \mathrm{E} \iff f \text{ projecteur}$$

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis calculer φ^2 et $\mathrm{Tr}\, \varphi$.

Exercice 5 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_p$ des hyperplans de E. Montrer

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{H}_i \geqslant n - p$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et p un projecteur de E. Montrer

$$u \circ p = p \circ u \iff u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p \quad \text{et} \quad u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$$

Exercice 7 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini n et F un sev de E avec $\dim \mathrm{F} = r$. On note

$$\Lambda = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}\}$$

Vérifier que Λ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis déterminer $\dim \Lambda$.

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n entier non nul et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E telles que

$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{E} \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

est un isomorphisme. On pose $\mathrm{F}_i = \bigcap\limits_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \setminus \{i\}} \mathrm{Ker}\ \varphi_k$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$.

1. Justifier que pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, φ_k est une forme linéaire non nulle.
2. Montrer que $$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k$$
3. Établir $$\bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k = \mathrm{E}$$

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{M} = 1$. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M.

Exercice 10 (*)

Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir A semblable à B.

Exercice 11 (**)

Soit n entier et $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Montrer que $\mathscr{B} = (\mathrm{P}_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer les coordonnées de la base canonique $\mathscr{C} = (\mathrm{X}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 12 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_k = \mathrm{Ker}\ f^k \qquad \mathrm{I}_k = \mathrm{Im}\ f^k$$

1. Montrer que les suites $(\mathrm{I}_k)_k$ et $(\mathrm{N}_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.

Exercice 14 (**)

Soient p, $q \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q \iff p,\, q \text{ projecteurs} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ p = \mathrm{Ker}\ q$$