

Feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n (non nul) et $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\text{rg } u \leq r \leq n - 1$. Montrer que u est composé d'endomorphismes de rang r .

Exercice 2 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = X(X - 1)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Préciser $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de E .
2. Déterminer des bases de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Exercice 3 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à B avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ (n entier non nul) une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on pose

$$\Phi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Préciser $\dim E$.
2. Justifier que Φ est un isomorphisme.
3. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer
$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Exercice 6 (*)**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul, $A \in E$. Résoudre en l'inconnue $X \in E$ l'équation

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \quad (\text{L})$$

Exercice 7 ()**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul et $(A, B) \in E^2$. On pose

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM - MB$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer $\forall (M, p) \in E \times \mathbb{N} \quad \Phi^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k$
3. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors Φ l'est aussi.

Exercice 8 (*)**

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 9 ()**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ \dots \circ u_n$?

Exercice 10 (*)**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E . On pose

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

Montrer Φ surjective $\iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre

Exercice 11 (*)**

Déterminer les sev stables pour l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 (*)**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u admet au moins deux sev stables.
2. On suppose u non nul et non injectif.
 - (a) Montrer que u admet au moins trois sev stables.
 - (b) Si $\dim E$ est impaire, montrer que u admet au moins quatre sev stables.
 - (c) Donner un exemple d'endomorphisme qui admet exactement trois sev stables.