ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Montrer
$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$$

Indications : Comparer $\mathrm{Im}\,(f+g)$ à $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et en déduire une minoration de $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$. Traduire $g \circ f = 0$ en terme d'inclusion puis utiliser le théorème du rang pour conclure.

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer
$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim \mathrm{E}$$

2. Montrer
$$2\,\mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \mathrm{rg}\,(f)$$

Indications : 1. Utiliser le théorème du rang et traduire $f \circ f^2 = 0$.
2. Considérer $f_{|\mathrm{Im}\, f}$.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})^n$ telle que
$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$
2. Justifier que $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ sans utiliser $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

Indications : 1. Observer que pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, la condition définit e_i^* sur une base de E.
2. Établir la liberté de $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ puis pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, montrer que celle-ci coïncide sur $\mathscr{B}$ avec le candidat naturel pour être la décomposition de f dans $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E. On pose

$$\Phi \colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *antéduale* à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, c'est-à-dire vérifiant
$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Indications : 1. Supposer Φ non surjective et utiliser dans ce cas le fait que $\mathrm{Im}\, \Phi$ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
2. Utiliser la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et p projecteur de E tel que $u = v \circ p$.

Indications : Considérer $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ une base de E puis travailler sur une matrice simple équivalente à A.

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 0$. Montrer que A est semblable à $\mathrm{E}_{1,n}$.

Indications : Utiliser le fait que $\mathrm{A} = \mathrm{XY}^\top$ avec X et Y deux colonnes non nulles puis déterminer A^2. Notant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A, raisonner ensuite par analyse/synthèse pour faire un choix de base adaptée à u.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n entier non nul.

1. Soient u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer
$$\mathrm{rg}\,(v) - \mathrm{rg}\,(u \circ v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u$$
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice p.
   (a) Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}\ u^k)_k$ croît strictement puis stationne.
   (b) Établir $$\frac{n}{p} \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u \leqslant n - p + 1$$

Indications : 1. Considérer $u_{|\mathrm{Im}\ v}$.
2.(a) Établir la croissance de la suite des noyaux itérés puis supposer qu'elle stationne avant l'ordre de nilpotence et aboutir à une contradiction.
2.(b) Appliquer le résultat de la première question avec $v = u^k$ pour k entier puis sommer les inégalités obtenues.

Exercice 8 (****)

Soit n entier non nul et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\mathrm{rg}\ \mathrm{M} = 1$, alors $\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}$.

   Dans ce qui suit, on suppose que M vérifie la relation $\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}$.
2. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = 1$. On pourra considérer $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{M}$ avec $\lambda = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$.
3. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$, décrire les classes de similitude de M.

Indications : 1. Établir que $\mathrm{M} = \mathrm{XY}^\top$ avec X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Calculer A^2.
3. Avec une base bien choisie, établir que M est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $2r \leqslant n$.