ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°07

Exercice 1 (*)

Nature de la série de terme général :

1. $\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}}$
2. $\ln(\mathrm{th}\,(n))$
3. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

Corrigé : 1. On a $\sqrt{\ln(n)} \leqslant \ln(n)$ pour $n \geqslant 3$ d'où

$$\forall n \geqslant 3 \qquad \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$$

Par comparaison $\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}} \text{ diverge.}}$

2. On a $\mathrm{th}\,(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ d'où

$$\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{th}\,(n)-1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\,(n)-1 = \frac{\mathrm{e}^{n}-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n}}-1 = \frac{-2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2n}$$

d'où
$$\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2n}$$

La série $\sum -2\mathrm{e}^{-2n}$ converge en tant que série géométrique de raison e^{-2} et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant), on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} \ln(\mathrm{th}\,(n)) \text{ converge.}}$$

Remarque : On peut aussi rédiger

$$\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-2n})$$

Par comparaison à une série géométrique, on obtient la convergence absolue et donc la convergence.

3. On a $\quad \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}}\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs et d'après le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \text{ converge.}}$$

Remarque : On peut aussi rédiger

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut à la convergence absolue et donc la convergence.

Exercice 2 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{(n+2)!}$ 2. $\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3}$ 3. $\dfrac{\ln(n)^n}{n!}$

Corrigé : 1. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} k!}{(n+2)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Puis $\qquad \forall k \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad 0 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} k! \leqslant (n-1)(n-1)! = n!$

Ainsi $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{n!}{(n+2)!} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

2. La série est à termes positifs. Avec la relation fondamentale de Arctan, on a pour $n \geqslant 1$

$$\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^3} = \exp\left[n^3 \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$$

Avec les développements $\operatorname{Arctan} u = u + \mathrm{O}(u^2)$ et $\ln(1+u) = u + \mathrm{O}(u^2)$, on trouve

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3} &= \exp\left[n^3 \ln\left(1 - \frac{2}{\pi n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[n^3\left(-\frac{2}{\pi n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right] = \exp\left(-\frac{2n}{\pi} + \mathrm{o}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}n}\end{aligned}$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et par convergence de la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3} \text{ converge.}}$$

3. Avec l'équivalent de Stirling, on a

$$\frac{\ln(n)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)^n \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

et $$\begin{aligned} n^2 \ln(n)^n \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} &= \exp\left[2\ln(n) + n\ln(\ln(n)) + n - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(2\pi n)\right] \\ &= \exp\left[-n\ln(n)(1+\mathrm{o}(1))\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

d'où $$\frac{\ln(n)^n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^n}{n!} \text{ converge.}}$$

Variante : On procéder sans l'équivalent de Stirling. Notant $u_n = \dfrac{\ln(n)^n}{n!}$ pour n entier non nul, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

et $\displaystyle \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{\ln(n)}(1 + \mathrm{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

d'où $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut avec le critère de d'Alembert.

Exercice 3 (*)

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé : Si $\beta \leqslant 0$, on a $$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$$

d'où la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ par comparaison. Pour $\beta > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}$ est continue, décroissante, positive sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc, par comparaison série/intégrale, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^\beta}$. Enfin, avec le changement $u = \ln(t)$, les intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ sont de même nature. Ainsi, avec le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1.}$$

Exercice 4 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$
2. $\sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
3. $\sin\left(\pi(2+\sqrt{5})^n\right)$

Corrigé : 1. Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{2} + \mathrm{O}(u^2)$, on trouve

$$\begin{aligned}
u_n = \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\
&= \sin\left(\pi n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\
u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) &= (-1)^n \frac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\pi}{2n}$ converge car vérifie le critère des séries alternées et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge par critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) \text{ converge.}}$$

2. Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \mathrm{o}(u^2)$, on obtient

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ vérifie le critère des séries alternées et donc converge. En revanche, on a

$$-\frac{1}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n} < 0$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant à partir d'un certain rang) et le critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left[u_n - (-1)^n \dfrac{\pi}{2n}\right]$ diverge et par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right) \text{ diverge.}}$$

3. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(2+\sqrt{5}\right)^n + \left(2-\sqrt{5}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left[\left(\sqrt{5}\right)^k + \left(-\sqrt{5}\right)^k\right] = 2 \underbrace{\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 5^k}_{=\mathrm{N}_n \in \mathbb{N}}$$

Ainsi $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sin(\pi(2+\sqrt{5})^n) = \sin\left(2\pi \mathrm{N}_n - \pi\left(2-\sqrt{5}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{5}\right)^n\right)$

D'où, avec $|\sin u| \leqslant |u|$ pour u réel, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant \pi(\sqrt{5}-2)^n$$

Par comparaison à une série géométrique de raison dans $]\,0\,;1\,[$, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{5}\right)^n\right) \text{ converge absolument.}}$$

Exercice 5 (*)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}$

2. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

3. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

Corrigé : 1. Pour n entier non nul, on a d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué à la fonction $t \mapsto t^\alpha$ continue sur $[\,0\,;1\,]$

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^{\alpha+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

D'où

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha} \text{ converge pour tout } \alpha > 0.}$$

2. On a

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}}_{v_n}\underbrace{-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées. Puis

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} < 0$$

Ainsi, d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on a

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{2}{3}$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{2}{3}.}$

3. On a $$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{u_n}\underbrace{-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées. Puis

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$$

Ainsi, d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on a

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$

Exercice 6 (*)

Montrer la convergence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t-\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On pose $f(t) = (t-\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 0$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}([0\,;+\infty[\,,\mathbb{R})$. Comme $0 \leqslant t-\lfloor t\rfloor \leqslant 1$ pour tout t réel, on a par croissances comparées $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de f par comparaison et critère de Riemann. Puis, on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1}(t-n)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[-(t-n)\mathrm{e}^{-t}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{-n}$$

On trouve $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}(t-\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-2\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}}$

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : La fonction f est décroissante de limite nulle donc positive. Avec le changement de variables $u = t - n\pi$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u$$

La série $\sum u_n$ est donc alternée. Par décroissance de f, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{\pi} f(u+(n+1)\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u$$

et $$0 \leqslant \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} f(n\pi)\,\mathrm{d}u = \pi f(n\pi) = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ vérifie le critère des séries alternées et par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Soit $x \geqslant 0$. Pour n entier, on a

$$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi \iff n = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$$

Notons $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$. Comme $n_x\pi > x - \pi$, on a $n_x\pi \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Puis

$$\begin{aligned}\left| \int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_{n_x\pi}^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (x - n_x\pi) f(n_x\pi) \leqslant \pi f(n_x\pi) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

et $$\int_0^{n_x\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n_x-1} u_k \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers la même limite pour $x \to +\infty$ et on conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 8 (**)

1. Montrer $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \mathrm{Arctan}\,(x) - \mathrm{Arctan}\,(y) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$
2. Convergence puis somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$

Corrigé : 1. Par trigonométrie, on trouve pour $(a,b) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[^2$ tel que $a-b \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Comme $\operatorname{Arctan}\tan u = u$ pour tout $u \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, il s'ensuit

$$\operatorname{Arctan}\tan(a-b) = a-b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\right)$$

On a également $\tan\operatorname{Arctan} u = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on choisit $a = \operatorname{Arctan}(x)$ et $b = \operatorname{Arctan}(y)$. Les conditions précedentes sur a et b sont bien vérifiées avec en particulier

$$-\frac{\pi}{2} < -\operatorname{Arctan}(y) \leqslant \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y) \leqslant \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en appliquant les relations précédemment obtenues, on trouve

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}$$

2. On a
$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1 \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1-(n-1)}{1+(n+1)(n-1)}\right)\\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n-1)\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une série téléscopique avec un décalage d'indices d'ordre 2. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} [\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)]\\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \operatorname{Arctan}(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Arctan}(k) = \operatorname{Arctan}(n+1) + \operatorname{Arctan} n - \operatorname{Arctan} 1\end{aligned}$$

d'où
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

On conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right) \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \frac{3\pi}{4}.}$$

Exercice 9 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^4+n^2+1}$

Corrigé : 1. La série vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_n$ décroît et tend vers zéro. Avec l'égalité $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$ pour k entier, on a pour n entier par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puis $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge et sa somme vaut } \frac{\pi}{4}.}$

2. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n+1} - \frac{1}{n(n+1)+1}\right]$

Il s'agit donc d'une série téléscopique et comme $\frac{1}{n(n+1)+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^4+n^2+1} \text{ converge et sa somme vaut } \frac{1}{2}.}$$

Exercice 10 (**)

Nature des séries de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(k)}{k\sqrt{k}}$ $\qquad$ 2. $\displaystyle\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$ $\qquad$ 3. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^3}$

Corrigé : 1. On a $\qquad \frac{\mathrm{Arctan}\,(n)}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}$

Par sommation de relation de comparaison, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(k)}{k\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\pi}{2k\sqrt{k}}$$

Par comparaison série/intégrale, on a pour n entier non nul

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$$

Ainsi $\qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}}{k\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{n}}$

Et on conclut $\qquad \boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}}{k\sqrt{k}} \text{ diverge.}}$

2. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} \quad$ et $\quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Par comparaison série/intégrale, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

On a $$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+v_n} = \frac{(-1)^n}{v_n}\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{v_n}}$$
$$= \frac{(-1)^n}{v_n}\left(1+\frac{(-1)^n}{v_n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{v_n} + \underbrace{\frac{1}{v_n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{v_n^2}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{v_n}$ vérifie le critère des séries alternées donc converge. En revanche, on a
$$\frac{1}{v_n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{v_n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$$
et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant), on en déduit la divergence $\sum w_n$. On conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}} \text{ diverge.}}$$

3. Par comparaison série/intégrale, on a pour n entier non nul
$$\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\ln(k)^3} \leqslant \int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^3}$$
Avec le changement de variable $u=\ln t$, on trouve
$$\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^3} = \int_{\ln n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^3} = \frac{1}{2\ln(n)^2}$$
Par suite $$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\ln(k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\ln(n)^2}$$

Par croissances comparées, on a $$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)$$

Par comparaison, on conclut $$\boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\ln(k)^3} \text{ diverge.}}$$

Exercice 11 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 > 2 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum(u_n-\ell)$.

Corrigé : On pose $f(x)=\sqrt{2+x}$ pour $x \geqslant 2$. La fonction f croît et on a
$$\forall x \geqslant 2 \qquad f(x) \leqslant x \iff 2+x \leqslant x^2 \iff (x-2)(x+1) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$$
Une récurrence immédiate donne $(u_n)_n$ minorée strictement par 2 et on a $(u_n)_n$ monotone et donc décroissante et par limite monotone, $(u_n)_n$ converge. La limite ℓ est point fixe de la fonction f continue sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et $f(x)=x \iff x=2$ d'où
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2}$$

La série $\sum(u_n - 2)$ est à termes strictement positifs d'après l'étude précédente. La fonction f étant dérivable en 2, il vient

$$\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} = \frac{f(u_n)-f(2)}{u_n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(2) = \frac{1}{4} < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum(u_n-2) \text{ converge.}}$$

Variante : L'approche la plus efficace consiste à observer que la fonction f est *contractante.* On a f dérivable sur $[\,2\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x \geqslant 2 \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \leqslant \frac{1}{4}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall (x,y) \in [\,2\,;+\infty\,[^2 \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{1}{4}\,|x-y|$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1}-2| \leqslant \frac{1}{4}\,|u_n-2|$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n-2| \leqslant \frac{1}{4^n}\,|u_0-2|$$

On obtient simultanément la convergence de la suite $(u_n)_n$ et de la série $\sum(u_n-2)$.

Remarque : On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = 4^n(u_n-2)$

D'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[\,2\,;+\infty\,[$, on a pour n entier

$$u_{n+1}-2 = f(u_n)-f(2) = f'(2)(u_n-2) + \frac{f''(2)}{2}(u_n-2)^2 + \mathrm{o}((u_n-2)^2)$$

puis

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) &= \ln\left(4\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}\right) = \ln\left[4\left(f'(2)+\frac{f''(2)}{2}(u_n-2)+\mathrm{o}(u_n-2)\right)\right]\\ &= \ln\left(1+2f''(2)(u_n-2)+\mathrm{o}(u_n-2)\right) = 2f''(2)(u_n-2)+\mathrm{o}(u_n-2)\end{aligned}$$

Comme la série $\sum(u_n-2)$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ et par conséquent la convergence de la suite $(\ln v_n)_n$ et donc celle de la suite $(v_n)_n$ vers une constante $\mathrm{C} > 0$, autrement dit

$$\boxed{u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{4^n} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} > 0}$$

Déterminer la constante C semble une toute autre affaire ...