# Feuille d'exercices n°08

## Exercice 1 (***)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(2\pi n!\mathrm{e})$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$

**Corrigé :** 1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis
$$\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}$$

D'après le critère des équivalents, licite puisqu'un des termes est de signe constant (donc l'autre aussi à partir d'un certain rang), on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin(2\pi n!\mathrm{e}) \text{ diverge.}}$$

2. Soit $n$ entier non nul. On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ pour $t \geqslant 1$. On a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([1;+\infty[,\mathbb{R})$ avec $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{3n}}\right)$ donc intégrable sur $[1;+\infty[$. Pour $t \geqslant 1$, on a $1+t^3 \geqslant 1+t^2 \geqslant 2t$ d'où par comparaison (intégrales convergentes)

$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t)^n} = \frac{1}{2^n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \text{ converge.}}$$

**Variante :** On peut aussi utiliser $1+t^3 \geqslant 3t-1$ pour $t \geqslant 1$ qu'on peut obtenir par étude de fonctions, par convexité ou aussi en s'appuyant sur $(1+h)^3 \geqslant 1+3h$ pour $h \geqslant 0$ et posant $h = t-1$. Le résultat suit.

3. Soit $n$ entier non nul. On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ pour $t \geqslant 0$. On a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ avec $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{2n}}\right)$ donc intégrable sur $[0;+\infty[$. Puis on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1}\left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Par comparaison $\boxed{\text{La série } \sum \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \text{ diverge.}}$

**Remarque :** Pour les questions 2 et 3, on a comparé les intégrales en se concentrant là où la « masse » de l'intégrale est concentrée, autrement dit pour de petites valeurs de $t$.

## Exercice 2 (***)

Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor}\right) \mathrm{d}t$ est bien définie puis la calculer.

**Corrigé :** On pose $$\forall t \geqslant 1 \qquad f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor}$$

Soit $n$ entier non nul. On a
$$\forall t \in [\,n\,; n+1\,[ \qquad f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{n}$$
d'où la continuité par morceaux de $f$ sur $[\,1\,; +\infty\,[$. Puis, on a
$$\forall t > 1 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor} \leqslant \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
Par comparaison, la fonction $f$ est intégrable sur $[\,1\,; +\infty\,[$ puis
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_1^n \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor}\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k}\right] = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Or, on sait $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

On conclut $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor}\right) \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -\gamma.}$

## Exercice 3 (***)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$
3. $\displaystyle\sum \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

**Corrigé :** 1. On a $$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car vérifie le critère des séries alternée et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge d'après le critère de Riemann. Par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \text{ converge.}}$$

Soit N entier. En dissociant les termes d'indices pairs et impairs, on obtient

$$\mathrm{S}_{2\mathrm{N}+1} = \sum_{n=2}^{2\mathrm{N}+1} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left[\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right] = 0$$

La suite $(\mathrm{S}_{2\mathrm{N}+1})_\mathrm{N}$ est constante égale à 0 et comme elle est extraite de la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ convergente car la série associée l'est, on conclut

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0}$$

2. Avec $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$ pour $k$ entier, il vient pour $n$ entier

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3} = \mathrm{o}(1)$$

et la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)_n$ décroît clairement. Ainsi, la série $\displaystyle\sum (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ vérifie le critère des séries alternées d'où

$$\boxed{\text{La série } \sum \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right] \text{ converge.}}$$

Avec N entier, on trouve

$$\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right] = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^2\left(1-(-t^2)^{\mathrm{N}+1}\right)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\mathrm{S}_\mathrm{N} = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t + (-1)^{\mathrm{N}+1}\int_0^1 \frac{t^{2(\mathrm{N}+2)}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme précédemment, on établit $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2(\mathrm{N}+2)}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$

Puis, avec une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right] = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}}$$

3. On a
$$\ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

La série $\displaystyle\sum \frac{-\alpha}{2^{n+1}}$ est une série géométrique convergente et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant), on obtient

$$\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) \text{ converge.}}$$

On a $$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \qquad \cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}$$

Ainsi, pour N entier, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left[\ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) - \ln(2)\right] \\ &= \ln\left(\sin(2\alpha)\right) - \ln\left(2^{\mathrm{N}+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^{\mathrm{N}}}\right)\right)\end{aligned}$$

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $2^{\mathrm{N}+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^{\mathrm{N}}}\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 2\alpha$ et on conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}\right)}$$

## Exercice 4 (***)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.

1. Si $\alpha > 1$, choisir $\beta \in \left]1\,;\alpha\right[$, comparer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Compléter l'étude pour $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

**Corrigé :** 1. On a $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi $$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underbrace{\frac{\alpha-\beta}{n}}_{>0} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par suite, il existe N entier non nul tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

d'où $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ décroît et par conséquent

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad u_n \leqslant \frac{u_{\mathrm{N}}}{v_{\mathrm{N}}} \times v_n = \mathrm{O}(v_n)$$

Comme $\beta > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} v_n = \sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} \dfrac{1}{n^\beta}$ converge par critère de Riemann et par comparaison, on obtient

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$$

**Variante :** Sans passer par la décroissance de la suite des quotients, avec un produit téléscopique, on obtient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad u_n = u_\mathrm{N} \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant u_\mathrm{N} \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_\mathrm{N}}{v_\mathrm{N}} \times v_n$$

On conclut comme ci-avant.

2. Si $\alpha < 1$, on choisit $\beta = 1$ et en procédant comme au 1., il existe $\mathrm{N} \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad 0 \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

puis
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ croît et par conséquent

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad v_n \leqslant \frac{v_\mathrm{N}}{u_\mathrm{N}} \times u_n = \mathrm{O}(u_n)$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} v_n = \sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \alpha < 1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge.}}$$

3. Considérons $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n \ln(n)^2}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et
$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{n\ln(n)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Or, la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge et la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge. Ainsi

$$\boxed{\text{On ne peut rien dire si } \alpha = 1.}$$

**Remarque :** Le critère établi dans cet exercice s'intitule *critère de Raabe-Duhamel*. On peut observer qu'il précise le cas litigieux de la limite égale à 1 dans le critère de d'Alembert.

## Exercice 5 (**)

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $\mathrm{A}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ pour $n$ entier avec $\mathrm{A}_0 = 0$ pour convention.

1. Montrer
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{A}_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k (b_{k+1} - b_k)$$

2. Application : pour $\theta$ réel, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$.

**Corrigé :** 1. Soit $n$ entier. On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1}]\, b_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_{k+1}$$

D'où
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{A}_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k\,[b_{k+1} - b_k]}$$

**Remarque :** Il s'agit de *la transformation d'Abel* qui est l'homologue discret de l'intégration par parties pour des sommes.

2. Soit $\theta$ réel. Si on a $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, le résultat est immédiat puisque $\sin(n\theta) = 0$ pour tout $n$ entier. Supposons $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k}$ pour $n$ entier. En lui appliquant la transformation d'Abel, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{n}\mathrm{T}_n(\theta) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{T}_k(\theta)\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_k(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$$

Puis
$$\mathrm{T}_n(\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) \implies |\mathrm{T}_n(\theta)| \leqslant \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}$$

ce qui prouve que la suite $(\mathrm{T}_n(\theta))_n$ est bornée. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

D'après le critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{Pour } \theta \text{ réel, la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} \text{ converge.}}$$

**Remarque :** On peut calculer sa somme en utilisant des résultats issus de la théorie des *séries de Fourier* mais on peut également procéder de manière élémentaire ...

## Exercice 6 (**)

Soit $(u_n)_n$ suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Corrigé :** Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n$ entier et S la somme de la série $\sum u_n$. Par décroissance de la suite $(u_n)_n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = n u_{2n}$$

et
$$\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$$

On en déduit
$$2n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Puis
$$0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = 2n u_{2n} \frac{2n+1}{2n}$$

d'où $$(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Comme les indices pairs et impairs forment une partition de $\mathbb{N}$, on conclut

$$\boxed{u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

## Exercice 7 (**)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$
2. $\sin(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n})$

**Corrigé :** 1. Pour $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}$ converge. Par comparaison série/intégrale avec la fonction continue décroissante $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1+\alpha}}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}$$

Par suite $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha n^\alpha}$$

Ainsi $$\boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n}\right) &= \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\right)\\ &= \sin\left[2\pi n\left(1+\frac{\alpha}{2n} - \frac{\alpha^2}{8n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] = \sin\left(\pi\alpha - \frac{\pi\alpha^2}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Ainsi $$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin(\pi\alpha)$$

Si $\sin(\pi\alpha) \neq 0$, la série diverge grossièrement. Sinon, on a

$$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n}\right) = -\frac{\cos(\pi\alpha)\pi\alpha^2}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\cos(\pi\alpha)\pi\alpha^2}{4n}$$

avec $\cos(\pi\alpha) \neq 0$ (puisque $\sin(\pi\alpha) = 0$). D'après le critère des équivalents (licite, signe constant), on en déduit la divergence de la série. Finalement, dans tous les cas

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\alpha n}\right) \text{ diverge.}}$$

## Exercice 8 (***)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ puis déterminer un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé :** Par récurrence immédiate, on a $u_n > 0$ pour tout $n$ entier. On a $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ par concavité d'où $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour $n$ entier donc la suite $(u_n)$ décroît et est minorée donc convergente par limite monotone. Comme $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est nécessairement point fixe de $f$ et on a $f(x) = x \iff x = 0$. On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

On a $$u_{n+1} = \ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}(u_n^2) \iff \frac{u_{n+1}}{u_n^2} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2}$$

On a notamment $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$. La limite précédente suggère de s'intéresser à $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ afin de faire apparaître une limite finie sur une somme téléscopique. On a

$$v_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{\dfrac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}(u_n^2)}{u_n u_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Par sommation des relation de comparaison, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim \frac{n}{2}$$

On conclut $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$$

**Variante :** On peut aussi chercher directement $\alpha$ réel tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ ait une limite finie non nulle puis considérer la série téléscopique associée.

## Exercice 9 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour $n$ entier. Déterminer un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé :** Par une récurrence immédiate, on obtient $u_n > 0$ et $u_n \geqslant 2^n u_0$ pour tout $n$ entier et on en déduit notamment $\dfrac{1}{u_n} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{u_n}{2^n}$$

Pour $n$ entier, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{u_n^2}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

La série téléscopique $\sum [\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)]$ converge d'où la convergence de la suite $(\ln(v_n))_n$ et par conséquent, il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{C}$$

On conclut $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}2^n}$$

## Exercice 10 (****)

Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

**Corrigé :** La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée et vérifie le critère des séries alternée puisque la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Son reste $\mathrm{R}_n$ d'ordre $n$ est donc bien défini. On sait aussi que $\mathrm{R}_n$ est du signe de $\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ donc la série $\sum \mathrm{R}_n$ est alternée et on a $|\mathrm{R}_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}$ d'où $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il reste à établir la décroissance de la suite $(|\mathrm{R}_n|)_n$ pour invoquer le théorème des séries alternées. Un changement d'indice donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n+1}}{\sqrt{k+n+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+n+1}}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+n+1}}$$

Ainsi, pour $n$ entier, par linéarité du symbole somme en cas de convergence

$$|\mathrm{R}_{n+1}| - |\mathrm{R}_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}}\right]$$

Soit $n$ entier. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+1+u}}$ sur $]\,k\,;k+1\,[$, il existe $\alpha_{n,k} \in\, ]\,k\,;k+1\,[$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}} = -\frac{1}{2\,(n+1+\alpha_{n,k})^{\frac{3}{2}}}$$

On pose $\qquad \forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \varepsilon_{n,k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+n+2}} = \dfrac{1}{2\,(n+1+\alpha_{n,k})^{\frac{3}{2}}}$

Clairement
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon_{n,k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Pour $n$ et $k$ entiers, comme $\alpha_{n,k} < k+1 < \alpha_{n,k+1}$, on en déduit que la suite $(\varepsilon_{n,k})_k$ décroît et par conséquent, la série définissant

$$|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varepsilon_{n,k}$$

vérifie elle aussi le théorème des séries alternées. Le signe de sa somme est donc celui de son premier terme à savoir positif ce qui prouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_n| \geqslant |\mathrm{R}_{n+1}|$$

On conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \text{ converge.}}$$