

Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 4 06/10/25 - 10/10/25

Programme :

Structures algébriques :

- Groupe, sous-groupe, morphisme de groupes ;
- Anneau, sous-anneau, anneau intègre, groupe des inversibles ;
- Idéal d'un anneau commutatif, somme d'idéaux, idéal engendré par un élément ;
- Divisibilité dans un anneau commutatif intègre, interprétations en termes d'idéaux ;
- Anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, idéaux, pgcd, relation de Bézout, lemme de Gauss, polynôme irréductible ;
- Algèbre, sous-algèbre, morphisme d'algèbres, image et noyau d'un morphisme d'algèbres.

Algèbre linéaire, rappels et compléments :

- Espace vectoriel, sous-espace ;
- Combinaison linéaire, famille libre, liée, base ;
- Somme de sev, somme directe ;
- Dimension finie, rang, existence de supplémentaire, formule de Grassmann, somme directe en dimension finie ;
- Applications linéaires, formes linéaires, hyperplan, rang d'une application, matrices par blocs (produit, déterminant) ;
- Homothéties, projecteurs, symétries, famille de projecteurs associés à une somme directe ;
- Matrices semblables ;
- Sous-espace stable, endomorphisme induit, caractérisation matricielle.

Questions de cours : (avec preuve sauf mention contraire)

1. Caractérisation d'une somme directe de p sev par unicité de la décomposition du vecteur nul ;
2. Inégalité $\dim \sum_{i=1}^p F_i \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$ et cas d'égalité ;
3. Théorème du rang (sans preuve) ;
4. Noyaux et images itérés, en dimension quelconque et en dimension finie ;
5. Caractérisation d'un hyperplan, en dimension finie ou infinie (sans preuve) ;
6. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ;
7. Caractérisation d'un projecteur p comme projection avec la décomposition $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$;
8. Caractérisation d'une involution linéaire s comme symétrie avec la décomposition $E = \text{Ker } (s - \text{id}) \oplus \text{Ker } (s + \text{id})$;

9. Famille de projecteurs associée à une somme directe ;
10. Caractérisation de deux matrices semblables ;
11. Interprétation matricielle d'une matrice triangulaire par blocs.