

DM 4 de Physique à rendre le vendredi 10/10/25

Faire l'image d'une exoplanète

La détection des exoplanètes, planètes situées en dehors de notre système solaire, constitue l'un des domaines les plus fascinants et dynamiques de l'astronomie moderne. Depuis la découverte de la première exoplanète en 1995, les scientifiques en ont identifié des milliers d'autres, révélant une diversité de mondes au-delà de notre imagination. Grâce à des techniques avancées – telles que la méthode des transits, la méthode des vitesses radiales ou encore l'imagerie directe –, les astronomes peuvent détecter et étudier ces lointaines planètes pour chercher à comprendre leur composition, leur atmosphère et leur potentiel d'habitabilité.

Dans ce sujet, on étudie la possibilité d'obtenir une image détaillée d'une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière du Soleil. Développer tout le formalisme nécessaire à la reconstruction d'une image complexe sort du cadre de ce sujet et on se ramène à une situation simplifiée : on considère deux points à la surface de l'exoplanète et on cherche à les distinguer ou à mesurer la distance qui les sépare.

Le problème comporte 3 parties indépendantes. Un formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

Partie A – Utilisation du phénomène d'interférences

En 2022, la collaboration Event Horizon Telescope a réussi à construire une image dans le domaine des ondes radios du trou noir situé au centre de notre galaxie à l'aide du phénomène d'interférences. Dans cette partie, on détermine s'il est possible d'appliquer cette méthode pour obtenir l'image d'une exoplanète à partir d'une situation modèle simplifiée (la construction véritable d'une image à partir d'un ensemble de figures d'interférences n'est pas traitée).

I – Principe de la mesure sur un système équivalent

On illustre ici le principe de la mesure en analysant une expérience mettant en jeu les fentes d'Young. Le montage expérimental est représenté sur la figure 1. Il est constitué des éléments suivants :

- deux sources ponctuelles S_A et S_B , incohérentes, séparées d'une distance d , qui émettent des ondes lumineuses monochromatiques de même amplitude à la longueur d'onde λ_0 ;
- une lentille convergente L_1 , de centre O_1 , de distance focale f'_1 ;
- des fentes T_1 et T_2 de largeur notée ℓ , perpendiculaires au plan de la figure, dont les centres sont éloignés d'une distance a .
- une lentille convergente notée L_2 , de distance focale f'_2 .
- un écran, situé dans le plan focal image de la lentille L_2 .

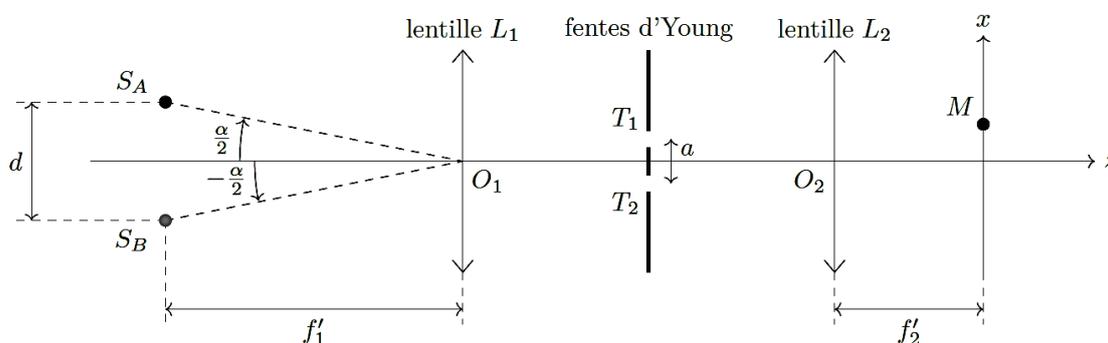


Figure 1

Les sources S_A et S_B sont situées dans le plan focal objet de la lentille L_1 . On note α l'angle positif ($S_B O_1 S_A$). Soit M un point d'abscisse x situé sur l'écran (voir figure 1). On admet que l'ordonnée y ne joue ici aucun rôle et on suppose que tous les angles d'incidence sont petits.

Pour commencer, on considère que seule la source S_A émet de la lumière (on ne prend pas en compte la source S_B). On note δ_{tot} la différence de marche au point M entre les rayons passant par chaque fente d'Young :

$$\delta_{\text{tot}} = (S_A T_2 M) - (S_A T_1 M).$$

On la décompose en deux parties :

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_{\text{source}} + \delta$$

où δ_{source} est la différence de marche introduite en amont des trous d'Young et δ celle introduite en aval :

$$\delta_{\text{source}} = (S_A T_2) - (S_A T_1) \quad \text{et} \quad \delta = (T_2 M) - (T_1 M).$$

Q1. Établir l'expression de δ_{source} en fonction de a et $\alpha \ll 1$.

On suppose que S_A émet un signal de la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$, où s_0 est une constante réelle positive et ω la pulsation de l'onde lumineuse.

Q2. Exprimer le signal $s_1(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_1 , ainsi que le signal $s_2(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_2 , en fonction de s_0 , ω , t , $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $(S_A T_1 M)$ et $(S_A T_2 M)$. On négligera la décroissance d'amplitude de l'onde liée à la propagation.

On appelle $I(M)$ l'intensité du signal mesuré au point M (notée également $I(\delta)$).

Q3. Donner l'expression de I à l'aide de s_1 et s_2 et éventuellement d'autres grandeurs. Dédurre de celle-ci la relation

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos \left[k \left(a \frac{\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right).$$

On tient désormais compte de la présence de la source S_B , en plus de celle de la source S_A .

Q4. Indiquer, avec justification, si les signaux issus de S_A interfèrent avec ceux issus de S_B . Montrer que l'intensité détectée au point M se met sous la forme

$$I_d(\delta) = I_{d,0} \left(1 + \Gamma(a, \alpha) \cos(k\delta) \right)$$

où la fonction Γ , appelée facteur de cohérence, est donnée par :

$$\Gamma(a, \alpha) = \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right).$$

Q5. Tracer l'allure de $I_d(\delta)$ en fonction de δ dans le cas où le facteur de cohérence vaut 1, puis dans le cas où le facteur de cohérence est nul.

L'expérience étudiée a été conduite en utilisant l'écran d'un smartphone pour réaliser les deux sources. Le montage expérimental est représenté sur la figure 2. La lentille L_2 et l'écran sont respectivement l'objectif et le capteur CCD d'un appareil photographique numérique réglé à l'infini.

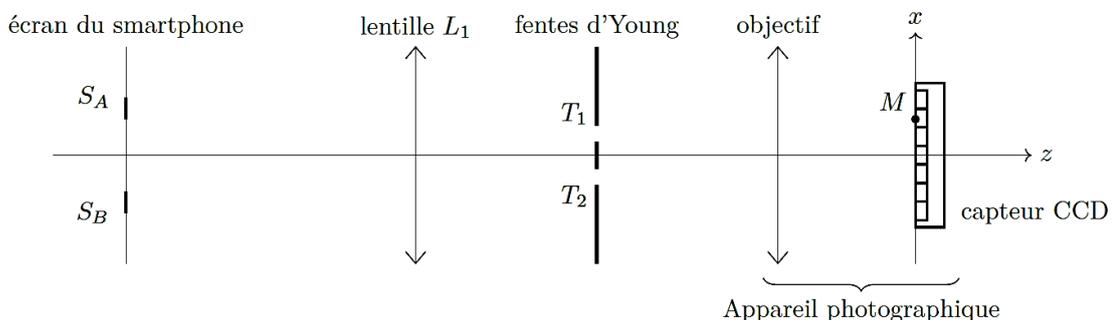


Figure 2

La figure 3 précise la nature de l'image utilisée sur l'écran du smartphone : ce qui apparaît en blanc sur la figure correspond à du noir sur l'image réelle, tandis que les traits épais noirs correspondent à deux traits lumineux qui jouent le rôle de sources de lumière de longueur d'onde λ_0 .

En analysant les résultats de l'expérience, il est possible de déterminer l'angle α . La figure 4 montre une partie de l'image donnée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de $\frac{\delta}{\lambda_0}$, où δ est la différence de marche introduite précédemment. Les paramètres sont les suivants : $a = 200 \mu\text{m}$, $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$, $f'_1 = 80 \text{ cm}$, $f'_2 = 5,6 \text{ cm}$.

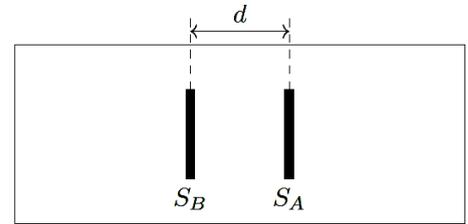


Figure 3 – Schéma de l'image utilisée sur l'écran du smartphone (pas à l'échelle).

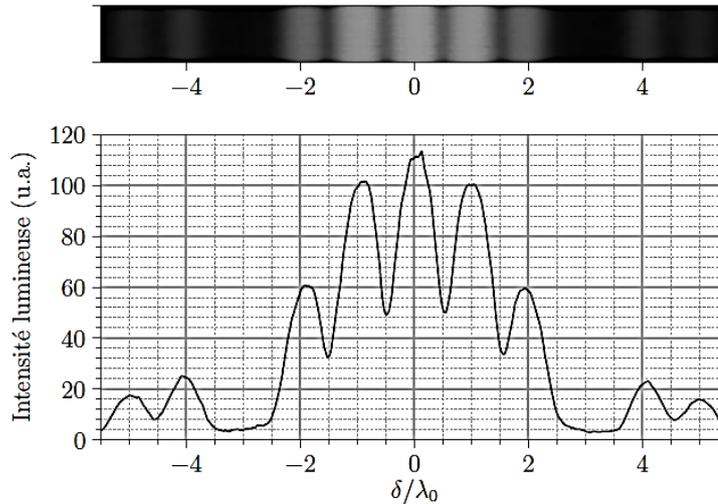


Figure 4 – Image du dessus : photographie de la figure d'interférences obtenue avec les fentes d'Young.
Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse pour la figure d'interférences.
L'axe des abscisses est le même pour les deux figures.

Q6. Calculer numériquement $\frac{ka}{2}$ pour cette expérience.

La lumière émise par la source n'est pas monochromatique : on peut considérer que l'incertitude-type sur λ_0 est $u(\lambda_0) = 30 \text{ nm}$.

Q7. En déduire l'incertitude-type sur $\frac{ka}{2}$.

On définit le contraste par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

où I_{\max} est l'intensité lumineuse maximale au centre de la figure d'interférences et I_{\min} l'intensité lumineuse sur les deux minimums qui encadrent la zone centrale d'intensité maximale.

Q8. Déterminer la valeur numérique du contraste pour cette figure d'interférences.

En changeant a et λ_0 , il est possible de mesurer le contraste pour d'autres valeurs de $\frac{ka}{2}$. La figure sur le document réponse montre ses variations en fonction de $\frac{ka}{2}$.

Q9. Ajouter votre point de mesure avec son incertitude-type sur le document réponse. L'incertitude-type sur le contraste sera prise égale à 10 % de sa valeur.

Le contraste C est relié au facteur de cohérence Γ (introduit à la question Q4) par $C = |\Gamma|$. Selon le modèle développé précédemment, on s'attend à observer pour C un comportement régi par la relation :

$$C = \left| \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right) \right|.$$

On considère donc la fonction

$$\frac{ka}{2} \mapsto C_0 \left| \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right) \right|$$

et on cherche les valeurs des paramètres C_0 et α qui minimisent l'écart entre les points expérimentaux et les valeurs prises par cette fonction aux mêmes abscisses, un peu comme on le ferait pour une régression linéaire. Par ce procédé d'ajustement, on obtient les valeurs avec incertitudes-types suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,421 & ; & \quad u(C_0) = 0,010 \\ \alpha &= 6,36 \times 10^{-4} \text{ rad} & ; & \quad u(\alpha) = 1,1 \times 10^{-5} \text{ rad} . \end{aligned}$$

Q10. Expliquer en quelques lignes comment on peut obtenir les incertitudes-types sur les paramètres C_0 et α en exploitant les incertitudes-types sur les données expérimentales.

Q11. En déduire la valeur numérique de d avec son incertitude-type $u(d)$.

On peut procéder à une mesure plus directe de la distance entre les deux sources. Pour cela, on part du montage étudié ci-dessus, puis on enlève les fentes d'Young. La figure 5 montre une partie de l'image qui est alors enregistrée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de x .

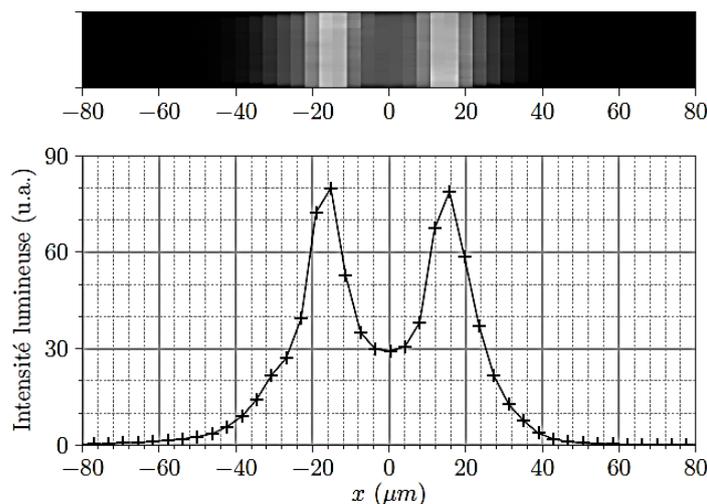


Figure 5 – Image du dessus : photographie obtenue lorsqu'on enlève les fentes d'Young.
Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse de la photographie.
Les axes des abscisses sont les mêmes pour les deux parties.

Q12. Déterminer une autre valeur numérique de d à partir de cette expérience, en proposant une estimation d'incertitude associée. Comparer à la valeur obtenue à la question **Q11**. Discuter à l'aide d'un critère quantitatif l'accord des deux résultats.

On a montré qu'il est possible de déterminer une caractéristique des sources lumineuses (leur distance) en étudiant une figure d'interférences. La reconstruction d'une image plus complexe se fait également en mesurant et en exploitant la fonction de contraste.

II – Interférences à deux télescopes

On transpose la situation modèle abordée dans la section précédente à l'expérience telle qu'elle peut être réalisée en astronomie. On considère deux télescopes séparés d'une distance a et pointés vers la même direction. Une source ponctuelle A_0 se trouve à l'infini, dans une direction faisant un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des télescopes (figure 6, représentée avec un angle positif). On suppose $|\alpha| \ll 1$. On note λ_0 la longueur d'onde considérée dans l'onde émise par la source ponctuelle.

Des rayons lumineux issus de la source sont captés par chaque télescope. Ils sont ensuite guidés par des fibres optiques jusqu'à un unique détecteur sur lequel ils sont combinés et interfèrent. Sur la fibre optique issue du télescope 2, un dispositif permettant d'ajouter une différence de marche variable, appelée *ligne à retard*, est installé.

Le chemin optique entre l'entrée du télescope 1 (notée T_1 sur la figure 6) et le détecteur est égal à L .

Le chemin optique entre l'entrée du télescope 2 (notée T_2 sur la figure 6) et le détecteur est égal à $L + \delta_r$, où δ_r est variable.

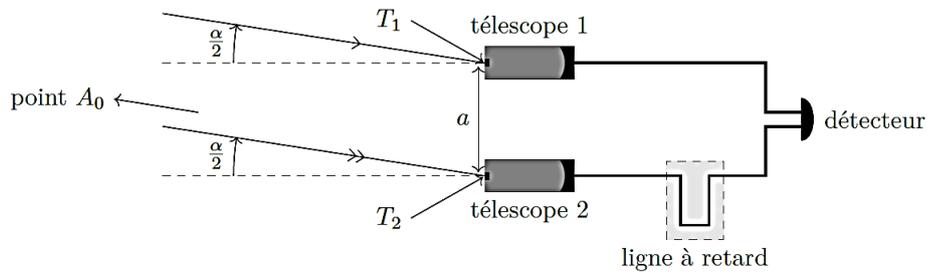


Figure 6

Q13. Établir l'expression de la différence de marche totale entre un rayon passant dans le télescope 2 et un rayon passant dans le télescope 1 en fonction de α , a et δ_r . Comparer au résultat de la question **Q1** et commenter.

En suivant une démarche similaire à celle conduite précédemment, on peut montrer que la résolution angulaire α_{res} de ces deux télescopes, c'est-à-dire ici l'angle minimal qui doit séparer deux points proches pour qu'ils soient correctement discernés, est telle que :

$$\alpha_{\text{res}} k a = \pi$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Dans le cadre du projet LIFE (Large Interferometer For Exoplanets), des scientifiques espèrent envoyer dans l'espace des télescopes dans le but d'observer des exoplanètes en utilisant la technique d'interférométrie dans le domaine de l'infrarouge (on choisit ici $\lambda_0 = 5 \mu\text{m}$). La distance entre les télescopes pourra atteindre 1 km.

Q14. Déterminer la résolution angulaire que l'on peut ainsi obtenir avec ces télescopes. En déduire la résolution spatiale (en kilomètres) que l'on peut espérer atteindre pour une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière. Commenter.

Partie B – Utilisation d’une lentille gravitationnelle

Dans cette partie, on étudie la possibilité d'utiliser le Soleil comme lentille gravitationnelle pour former l'image d'une exoplanète. Il s'agit d'un projet exploratoire, proposé par Slava Turyshev (NASA Jet Propulsion Laboratory) et ses collaborateurs, qui a été sélectionné par la NASA pour son aspect prometteur [1].

Un astre massif tel qu'une étoile ou un trou noir crée un champ gravitationnel et courbe l'espace-temps selon les lois de la relativité générale. La présence de l'astre conduit à une déviation de la lumière – qui suit un chemin optimal (géodésique) dans l'espace-temps – et par suite au phénomène de lentille gravitationnelle.

Considérons un point A_0 d'une exoplanète situé à l'infini, derrière le Soleil de centre S . Il émet des rayons lumineux parallèles à l'axe optique défini comme la droite passant par A_0 et S . On admet que ces rayons sont déviés par le Soleil d'un angle :

$$\chi = \frac{2r_{\text{sch}}}{b}$$

où $r_{\text{sch}} = \frac{2GM_s}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild du Soleil et b le paramètre d'impact du rayon lumineux, c'est-à-dire sa distance à l'axe optique. Suite à sa déviation, ce rayon intersecte l'axe optique en un point F_b . La courbure des rayons due au Soleil est très faible : ainsi, il est possible de modéliser le rayon lumineux par deux demi-droites, comme sur le schéma de la figure 7 (qui n'est évidemment pas à l'échelle). Le Soleil y est représenté par un cercle et son centre par le point S .

Pour un rayon lumineux rasant le Soleil (tracé en gris épais), on peut considérer que $b = R_s$, avec R_s le rayon du Soleil. On note F_0 le point d'intersection de ce rayon avec l'axe optique et on l'appelle *foyer image gravitationnel du Soleil*.

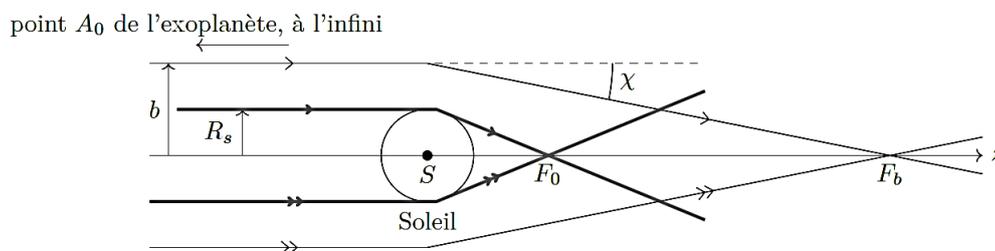


Figure 7

Q15. Exprimer la distance SF_b en fonction de r_{sch} et b . Calculer numériquement $z_0 = SF_0$. On exprimera cette distance en unités astronomiques et on la comparera au rayon de l'orbite de Neptune, qui est de 30 unités astronomiques.

Q16. Analyser la possibilité, pour un observateur situé entre S et F_b , d'exploiter l'effet de lentille gravitationnelle pour voir le point A_0 .

On décrit ce phénomène de déviation de la lumière comme une *lentille gravitationnelle*.

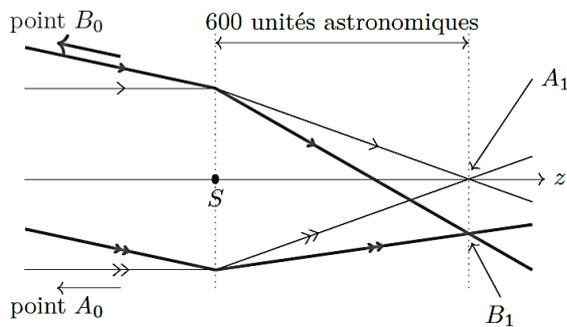
Q17. Comparer le devenir de rayons venant de l'infini, parallèles à l'axe optique, lorsqu'ils sont déviés par :

- une lentille mince en verre, utilisée en optique géométrique ;
- une lentille gravitationnelle.

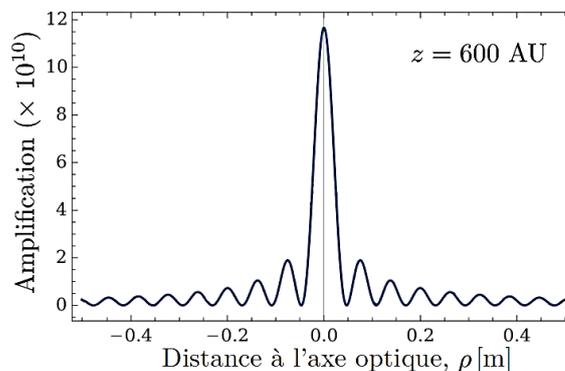
Il est conseillé d'illustrer votre réponse à l'aide de schémas.

Un des intérêts principaux de cette lentille gravitationnelle est le grand pouvoir de résolution qu'elle permet d'obtenir, c'est-à-dire une grande capacité à distinguer des détails. Les questions qui suivent ont pour but de déterminer la distance minimale entre deux points de la surface d'une exoplanète que l'on peut discerner grâce à une lentille gravitationnelle.

On suppose que l'exoplanète se trouve à une distance de 100 années-lumières. On se place au point F_1 tel que $SF_1 = 600\text{au}$. Une image A_1 de A_0 se forme en ce point. On considère un deuxième point B_0 , situé à la surface de l'exoplanète, hors de l'axe optique. La lentille gravitationnelle solaire forme une image B_1 de B_0 dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par A_0 (voir figure 8a). On admet que les points B_0 , S et B_1 sont alignés.



(a)



(b) Adaptée de [2].

Figure 8

Q18. Exprimer la distance A_1B_1 en fonction de A_0B_0 , SA_0 et SA_1 .

En pratique, la lumière issue de A_0 ne converge pas exactement vers A_1 : on observe un étalement de la lumière au voisinage de ce point. La figure 8b montre l'intensité lumineuse en fonction de la distance à l'axe optique (l'ordonnée indique « Amplification » qu'on assimile à l'intensité lumineuse dans l'étude menée ici). On admet que la lumière issue de B_0 s'étaie avec le même profil d'intensité lumineuse autour du point B_1 .

Q19. Proposer, à l'aide de la courbe figure 8b, une valeur numérique pour ρ_{\min} , valeur minimale de la distance A_1B_1 telle que les taches centrales des intensités lumineuses autour de A_1 et B_1 ne se superposent pas.

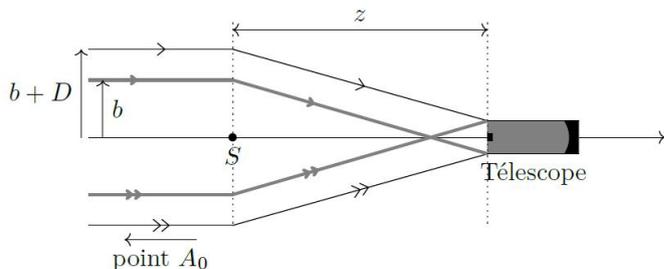
Q20. Déterminer la valeur numérique de A_0B_0 correspondant à $A_1B_1 = \rho_{\min}$. Commenter.

Les images formées par cette lentille gravitationnelle solaire sont trop grandes pour être acquises d'un coup. Une sonde mesurerait donc point par point l'image.

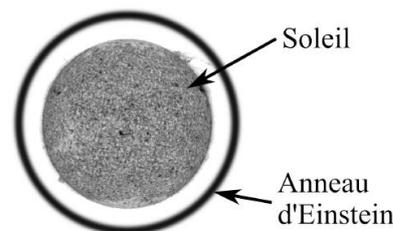
On considère une sonde qui collecte de la lumière issue du point A_0 avec un télescope. Sur la figure 9, le schéma 9a représente la situation. La figure 9b est une illustration de l'image constituée par le télescope : la lumière qui a été déviée par la lentille gravitationnelle forme autour du Soleil un cercle qu'on appelle anneau d'Einstein.

On note D le diamètre du télescope et z la distance entre le centre du Soleil et l'entrée du télescope. En première approximation, le télescope capte tous les rayons qui ont un paramètre d'impact compris entre b et $b + D$.

Q21. Discuter la modification de l'anneau d'Einstein lorsque la sonde s'éloigne du Soleil.



(a)



(b) Adaptée de [3].

Figure 9

Un autre intérêt principal de la lentille gravitationnelle est qu'elle amplifie la lumière reçue. On peut le mettre en évidence à l'aide d'un calcul simple. On définit le facteur d'amplification de cette lentille par :

$$\mu = \frac{\text{puissance lumineuse issue de } A_0 \text{ collectée par le télescope avec la lentille gravitationnelle}}{\text{puissance lumineuse issue de } A_0 \text{ collectée par le télescope sans la lentille gravitationnelle}}$$

Q22. Justifier que $\mu = \frac{8b}{D}$. Calculer numériquement μ pour un télescope situé en F_0 (donc pour $b = R_s$) et $D = 1,0$ m. Commenter.

Données et formulaire

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Année-lumière (al)	$1,00 \text{ al} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$
Unité astronomique (au)	$1,00 \text{ au} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_s = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Remarque : l'unité astronomique (symbole au) est une unité couramment utilisée en astronomie qui correspond approximativement à la distance entre la Terre et le Soleil.

Formulaire

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Nom :

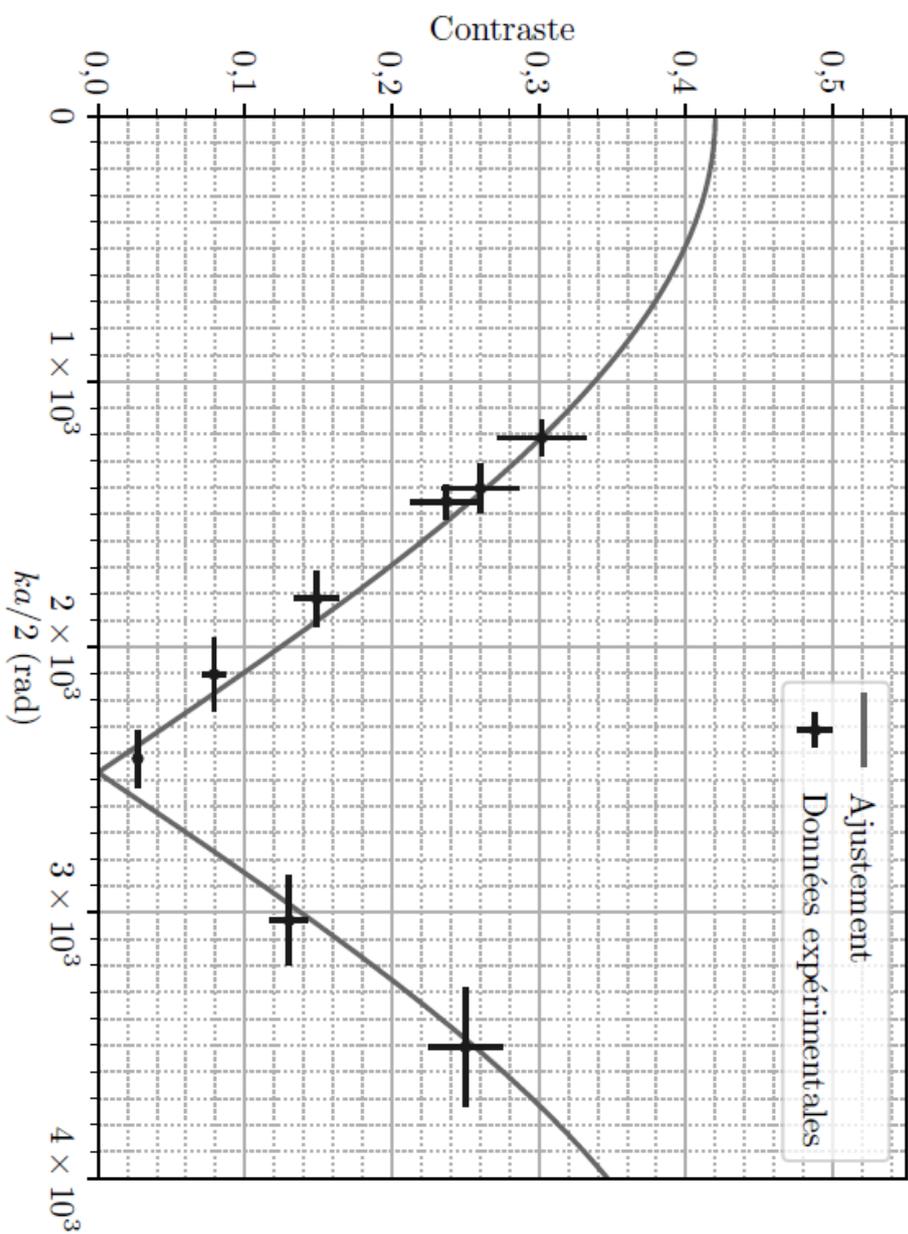


FIGURE 1 – Évolution du contraste en fonction de $ka/2$ pour l'expérience des fentes d'Young, où k est le vecteur d'onde et a la distance entre les deux fentes.