

DS2 de Physique du 27/09/25**Calculatrices interdites****4h**

Malgré l'absence de calculatrice les applications numériques seront faites si possible avec deux chiffres significatifs

Rappel des consignes :

Présentation de la copie :

- *Laisser une marge à gauche pour la notation.*
- *Encadrer ou souligner les résultats.*
- *Donner le numéro complet de la question à laquelle vous répondez.*

Rédaction :

- *Répondre précisément aux questions posées*
- *Respecter les notations de l'énoncé.*
- *Ne pas utiliser d'abréviations (sauf si elles ont été définies)*
- *Justifier tous les résultats.*
- *Rédiger de façon claire, précise et concise.*
- *Citer le nom des lois utilisées.*
- *Toujours donner un résultat littéral (avant de faire éventuellement l'application numérique), sans application numérique intermédiaire, sans mélanger littéral et numérique.*
- *Contrôler l'homogénéité du résultat.*

Applications numériques :

- *Donner un nombre raisonnable de chiffres significatifs.*
- *Arrondir correctement la valeur donnée par la calculatrice.*
- *Ne jamais oublier les unités.*
- *Contrôler que l'ordre de grandeur est raisonnable.*
- *Ne jamais réutiliser le résultat arrondi d'une application numérique précédente (pour éviter les erreurs d'arrondis)*

La notation prendra en compte le respect de ces consignes (aucun point pour un résultat non homogène, des points de rédaction...)

Problème 1 : Utilisation de panneaux solaires

Régulation de la conversion continu-alternatif : nécessité d'un onduleur

Données :

Fréquence du réseau EDF : $f = 50$ Hz

Aides numériques : $\log(2) \approx 0,30$; $\log(3) \approx 0,48$; $\log(5) \approx 0,70$; $\log(17) \approx 1,23$; $\log(26) \approx 1,41$

Un panneau solaire délivrant un courant et une tension continus, il est nécessaire de réaliser une conversion continu-alternatif en vue du couplage au réseau EDF, sinusoïdal de fréquence f . Un onduleur permet d'obtenir une tension alternative à partir d'une tension continue de valeur E . Le circuit de la **figure 1** met en jeu 4 interrupteurs notés (K_1, K_2, K_3, K_4) , dont le fonctionnement périodique de période $T = 1/f$ est commandé électroniquement. Pour un onduleur à commande symétrique, l'état des interrupteurs au cours du temps est le suivant :

- pour $nT < t < (n + \frac{1}{2})T$, avec $n \in \mathbb{N}$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont fermés, les interrupteurs K_2 et K_4 sont ouverts ;
- pour $(n + \frac{1}{2})T < t < (n + 1)T$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont ouverts, les interrupteurs K_2 et K_4 sont fermés.

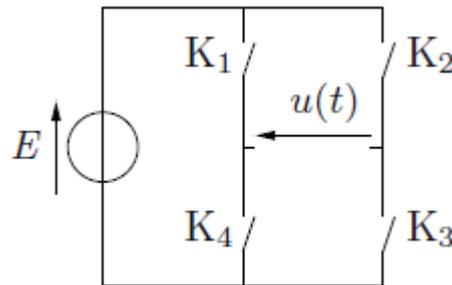


Figure 1 – Circuit électrique de l'onduleur.

Q1. Tracer le graphe représentant la tension u en fonction de t , sur 2 périodes.

On fournit la décomposition en série de Fourier du signal $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f t) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2E[1 - \cos(n\pi)]}{n\pi}$$

Q2. Représenter le spectre de Fourier en amplitude de $u(t)$, jusqu'à la fréquence $5f$ incluse.

Si on veut coupler la tension $u(t)$ au réseau, il convient d'avoir une tension la plus sinusoïdale possible de manière à éviter une pollution harmonique du réseau. On peut améliorer le fonctionnement de l'onduleur en opérant une commande décalée des interrupteurs selon le **tableau 1**. La durée τ , inférieure à $T/2$, est réglable.

| | $]0, \tau[$ | $]\tau, T/2 - \tau[$ | $]T/2 - \tau, T/2 + \tau[$ | $]T/2 + \tau, T - \tau[$ | $]T - \tau, T[$ |
|-------|-------------|----------------------|----------------------------|--------------------------|-----------------|
| K_1 | ouvert | fermé | fermé | ouvert | ouvert |
| K_4 | fermé | ouvert | ouvert | fermé | fermé |
| K_2 | ouvert | ouvert | fermé | fermé | ouvert |
| K_3 | fermé | fermé | ouvert | ouvert | fermé |

Tableau 1 – Fonctionnement à commande décalée : état des interrupteurs sur l'intervalle $]0, T[$.

- Q3.** Dessiner le circuit électrique équivalent dans les différentes configurations du tableau. Tracer alors la courbe $u = f(t)$ sur l'intervalle $]0, T[$.
- Q4.** Rappeler la définition des valeurs moyenne U_0 et valeur efficace U_{eff} du signal $u(t)$, puis les calculer en fonction de E , T et de τ .

On fournit à nouveau la décomposition en série de Fourier du signal $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nft) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2E[1 - \cos(n\pi)] \cos(2\pi nft)}{n\pi}$$

- Q5.** Représenter, sans se préoccuper de son amplitude, le mode fondamental de $u(t)$ sur le graphe tracé à la **question Q3**.
- Q6.** Déterminer, littéralement puis numériquement, la plus petite valeur de τ permettant d'éliminer la première harmonique non nulle de la série de Fourier (hors fondamental).

Dans le but d'atténuer les harmoniques restantes du signal $u(t)$ et ainsi se rapprocher encore plus d'un signal sinusoïdal, on complète le circuit de l'onduleur en y ajoutant une bobine idéale d'inductance propre L , dite inductance de lissage, et un conducteur ohmique de résistance R (voir **figure 2**). Les interrupteurs suivent encore un fonctionnement à commande décalée (voir **tableau 1**), et la valeur de τ est celle obtenue à la **question Q6**.

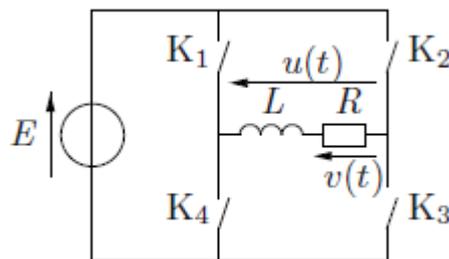


Figure 2 – Onduleur LR série

- Q7.** Justifier l'intérêt de prélever la tension de sortie $v(t)$ aux bornes de R , plutôt qu'aux bornes de L . Aucun calcul n'est attendu.
- Q8.** Etablir la fonction de transfert en régime harmonique $H(j\omega) = \underline{v}/\underline{u}$ du filtre ainsi réalisé. Déterminer sa fréquence de coupure f_c en fonction de L et de R .
- Q9.** A résistance R fixée, justifier qualitativement que le choix de l'inductance de lissage L résulte d'un compromis : que risque-t-il de se passer si L est trop petite ? trop grande ?

On impose à la tension de sortie $v(t)$ le cahier des charges suivant :

- la composante fondamentale ne doit pas être atténuée de plus de 4 dB ;
- la première harmonique non nulle doit être atténuée de plus de 14 dB.

- Q10.** Si l'on choisit la fréquence de coupure égale à la fréquence de la composante fondamentale, vérifier que le cahier des charges est respecté. Calculer numériquement la valeur de L si l'on prend $R = 100 \Omega$.

- Q11.** Comment pourrait-on faire pour atténuer encore davantage les harmoniques résiduelles ?

Problème 2 : Filtrage analogique et numérique

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 et 1 Hz.

L'accéléromètre fournit un signal analogique de tension U , pollué par du bruit dont les composantes spectrales de fréquence supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures sans apporter aucune information sur l'état de la mer. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

Filtrage analogique

Q 31. Parmi les trois types de filtres A, B et C représentés sur la figure 7, lequel convient ? Justifier la réponse.

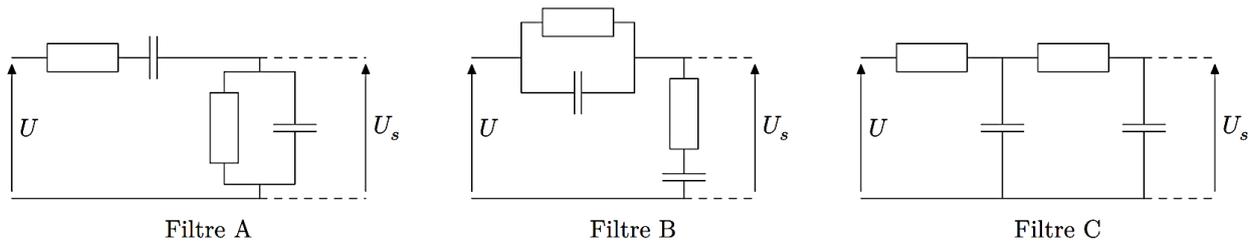


Figure 7 Exemples de filtre analogiques composés de résistors et de condensateurs

Q 32. Les deux résistors présentent la même résistance R et les deux condensateurs la même capacité C . Donner, en la justifiant, l'expression non simplifiée de la fonction de transfert $\underline{H}_F(j\omega)$ du filtre choisi, en fonction de R , C et $j\omega$.

Puis la mettre sous la forme :

$$\underline{H}_F(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} \quad \text{où on exprimera la constante } H_0$$

Q 33. Quelles valeurs proposez-vous pour R si on impose $C = 1 \mu\text{F}$?

Filtrage numérique

Certains modèles de Waverider ne sont pas munis d'un filtre analogique, mais seulement d'un filtre *numérique*. Le signal U fourni par l'accéléromètre est échantillonné à la fréquence de 10,24 Hz puis traité numériquement pour obtenir un signal filtré U_s . Soit $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ les valeurs échantillonnées du signal et $\{U_{Sk}, k \in \mathbb{N}\}$ celles que l'on obtient à la sortie du filtre.

Q 34. Proposer un traitement numérique permettant de passer des $\{U_k\}$ aux $\{U_{Sk}\}$. Vous explicitez (avec démonstration) la relation de récurrence pour le filtre dont fonction de transfert est donnée en Q32 avec $H_0 = 1$.

Après divers traitements, le signal final est échantillonné à la fréquence de 2,56 Hz. Toutes les 200 secondes, 512 échantillons sont envoyés à un microprocesseur qui calcule le spectre des hauteurs de vagues.

Q 35. Sur quel intervalle de fréquence convient-il d'afficher le spectre obtenu ?

Problème 3 : L'assistance gravitationnelle

Lancées par la NASA en 1977, les deux sondes Voyager continuent encore aujourd'hui d'envoyer des informations sur Terre, à plus de 20 milliards de kilomètres de distance. Ces sondes ont collecté d'incalculables données scientifiques sur les planètes extérieures Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, en tirant profit d'une conjonction exceptionnelle de ces planètes qui a permis aux sondes leur survol pratiquement sans dépense de carburant, grâce à l'assistance gravitationnelle. Données :

- Constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse du Soleil : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- Masse de Jupiter : $M_J = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

I – Généralités

On considère une sonde du programme *Voyager*, assimilée à un point matériel P de masse m . La sonde est en mouvement dans un champ gravitationnel qu'on supposera uniquement dû ici à Jupiter, relativement au référentiel d'étude "jupiterocentrique" \mathcal{R}_J considéré galiléen.

La planète est assimilée à une boule à répartition sphérique de masse, de sorte qu'elle se comporte d'un point de vue gravitationnel comme un point matériel fictif de même masse M_J que cette dernière et situé en son centre J .

Q27. Justifier que le moment cinétique \vec{L}_J par rapport au point J de la sonde se conserve. En déduire que le mouvement de la sonde est plan. On repère la sonde par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, z=0)$ de centre J . On choisit l'axe (J, \vec{u}_z) de sorte que $\vec{L}_J = \|\vec{L}_J\| \vec{u}_z$. Montrer que la quantité $C = r^2 \dot{\theta}$ est constante.

Q28. Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ dont dérive la force gravitationnelle subie par la sonde. On prendra $\mathcal{E}_p(r \rightarrow +\infty) = 0$.

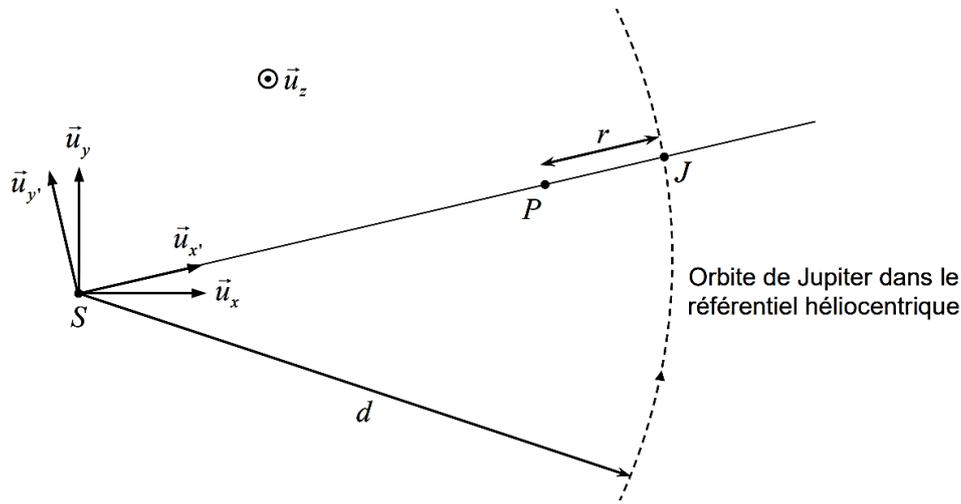
Q29. Justifier que l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de la sonde se conserve. Établir son équation radiale sous la forme : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$, où $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ désigne une énergie potentielle effective dont on donnera l'expression en fonction de m , C , r et de $\mathcal{E}_p(r)$. Représenter qualitativement $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$. Expliciter les différents états possibles de la sonde en précisant la forme de sa trajectoire selon la valeur de son énergie mécanique \mathcal{E}_m .

Q30. Donner l'expression de la vitesse minimale v_ℓ qu'il faudrait communiquer à la sonde à la distance r du centre J de Jupiter pour qu'elle se libère de l'attraction gravitationnelle de Jupiter. Cette vitesse est appelée vitesse de libération de la sonde.

II - Sphère de Hill de Jupiter

Dans la sous-partie précédente, seule l'influence de l'attraction gravitationnelle de Jupiter sur le mouvement de la sonde a été considérée. On se propose dans cette sous-partie d'établir une condition quantitative pour négliger l'influence de l'attraction gravitationnelle du Soleil devant celle de Jupiter.

On considère pour cela que le centre J de Jupiter décrit une trajectoire circulaire de rayon $d = 7,8 \cdot 10^8 \text{ km}$ autour du centre S du Soleil dans le plan orbital $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, relativement au référentiel héliocentrique \mathcal{R}_h considéré galiléen. On note Ω la vitesse angulaire à laquelle tourne le point J dans le sens direct de l'axe (S, \vec{u}_z) dans ce référentiel (**figure 7**). On suppose, comme pour Jupiter, que le Soleil se comporte d'un point de vue gravitationnel comme un point matériel fictif de même masse M_S que ce dernier et situé en son centre S .



Q31. Établir, les expressions de Ω et de la vitesse $V_{J,h}$ de Jupiter dans le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_h en fonction de \mathcal{G} , M_S et de d .

On raisonne dans la suite de cette sous-partie dans le référentiel \mathcal{R}' auquel est lié un repère de centre S dont les axes $(S, \vec{u}_{x'})$ et $(S, \vec{u}_{y'})$ tournent autour de l'axe (S, \vec{u}_z) , dans le sens direct et à la vitesse angulaire Ω dans le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_h , avec $\vec{u}_{x'} = \overline{SJ} / d$.

Q32. Le référentiel \mathcal{R}' est-il galiléen ? Justifier.

Q33. On considère la configuration où la sonde P est située dans le plan orbital $(S, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$ de Jupiter et telle que S , P et J soient alignés dans cet ordre (**figure 7**). On cherche la distance r de la sonde au centre J de Jupiter à laquelle elle est en équilibre dans le référentiel \mathcal{R}' . Donner les expressions des forces s'exerçant sur la sonde P en fonction de m , M_J , M_S , Ω , \mathcal{G} , d et de r . On se limitera pour les forces d'origine gravitationnelle à celles dues au Soleil et à Jupiter.

Q34. Montrer que la condition d'équilibre conduit à : $d^3(d-r)^2 = \kappa \cdot r^2((d-r)^3 - d^3)$.

avec κ une constante qu'il faudra exprimer en fonction de M_S et M_J .

On suppose que $r \ll d$. En effectuant un développement limité à l'ordre le plus bas possible en r/d de chaque terme de l'égalité précédente, établir l'expression de la distance $r = r_H$ en fonction de M_J , M_S et de d .

On admet que cette expression reste valide en première approximation pour toute valeur de l'angle θ repérant la position de la sonde depuis le centre de Jupiter. L'ensemble des points de l'espace tels que la sonde P soit en équilibre dans le référentiel \mathcal{R}' est donc approximativement une sphère centrée en J , de rayon r_H , appelée sphère de Hill.

Désormais, nous négligerons donc l'influence du Soleil devant celle de Jupiter sur la sonde dès lors que cette dernière se trouve dans la sphère de Hill.

III - Principe de l'assistance gravitationnelle

On considère dans cette dernière sous-partie que la sonde arrive à l'entrée de la sphère de Hill de Jupiter avec une vitesse $\vec{v}_{e,j} = v_{e,j} \vec{u}_x$ relativement au référentiel "jupiterocentrique" \mathcal{R}_j . Elle passe "derrière" Jupiter, puis sort de la sphère de Hill avec une vitesse $\vec{v}_{s,j}$. On note D l'angle entre $\vec{v}_{s,j}$ et $\vec{v}_{e,j}$ (**figure 8**).

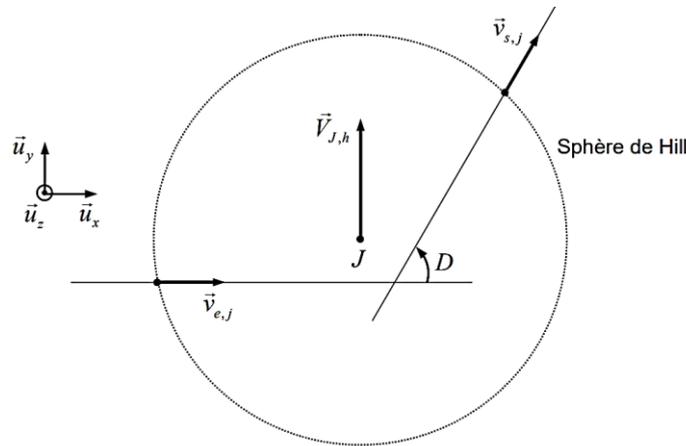


Figure 8 - Déviation de la sonde dans le référentiel " jupiterocentrique "

On suppose la durée de passage dans la sphère de Hill suffisamment courte pour pouvoir considérer d'une part le référentiel " jupiterocentrique " \mathcal{R}_j galiléen, et d'autre part la vitesse $\vec{V}_{J,h}$ du centre J de Jupiter dans le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_h constante et selon $+\vec{u}_y$ pendant cette durée. On suppose enfin que le plan orbital de la sonde dans le référentiel " jupiterocentrique " \mathcal{R}_j est confondu avec le plan orbital $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ de Jupiter dans le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_h .

Q35. Par un théorème énergétique, montrer que $v_{e,j} = v_{s,j}$.

On notera simplement par la suite $v_j = v_{e,j} = v_{s,j}$. On prendra pour les applications numériques $v_j = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q36. Pourquoi la vitesse v_j de la sonde est-elle nécessairement supérieure ou égale à sa vitesse de libération v_f à la distance r_H (question **Q30**) ?

Q37. On note $\vec{v}_{e,h}$ et $\vec{v}_{s,h}$ les vitesses de la sonde dans le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_h respectivement à l'entrée et à la sortie de la sphère de Hill.

Etablir les expressions de $\vec{v}_{e,h}$ et $\vec{v}_{s,h}$ en fonction de $\vec{v}_{e,j}$, $\vec{v}_{s,j}$ et de $\vec{V}_{J,h}$.

Q38. Reproduire la **figure 8** sur la copie et y représenter les vitesses $\vec{v}_{e,h}$ et $\vec{v}_{s,h}$. Vérifier qualitativement que la norme de la vitesse de la sonde a bien augmenté dans le référentiel héliocentrique à la sortie de la sphère de Hill. Dans quelle configuration l'augmentation de vitesse serait-elle maximale ? (Pour quelle valeur de D ?)

Q39. Exprimer $v_{e,h}$ et $v_{s,h}$ en fonction de v_j , $V_{J,h}$ et de D .

Q40. Sachant que $D = 60^\circ$, on donne $v_{e,h} = 16 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{s,h} = 22 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

. En déduire les valeurs numériques de la variation $\Delta v_h = v_{s,h} - v_{e,h}$ de la vitesse de la sonde relativement au référentiel héliocentrique à l'issue de son passage à proximité de Jupiter, puis de l'économie d'énergie $\Delta \mathcal{E}_{c,h} = \frac{1}{2} m v_{s,h}^2 - \frac{1}{2} m v_{e,h}^2$ réalisée grâce à l'assistance gravitationnelle de Jupiter. On prendra $m = 7,2 \cdot 10^2 \text{ kg}$.
D'où vient le gain d'énergie cinétique de la sonde ?

Q41. La sonde *Voyager* dispose de 16 petits propulseurs identiques brûlant des ergols liquides et utilisés à la fois pour les modifications de trajectoire et pour les changements ou corrections d'orientation. En brûlant 50 % de sa quantité d'ergols liquides embarquée, on estime que l'accroissement de vitesse correspondant de la sonde serait de $60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Comparer à l'accroissement de vitesse obtenu grâce à l'assistance gravitationnelle et conclure.

Problème 4 : Un traîneau sur la glace de la banquise

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou *musher*, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d .

□ 12 — Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Montrer qu'un tel élément de corde transmet les tensions et que celles-ci sont colinéaires à la corde.

□ 13 — Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ'_d , que l'on exprimera.

Indication : On montrera que sous l'action de la même force de traction F exercée par les chiens, l'accélération du traîneau est la même sur une pente ascendante d'angle α avec un coefficient μ_d que sur une surface horizontale avec un coefficient μ'_d que l'on exprimera en fonction de μ_d et α .

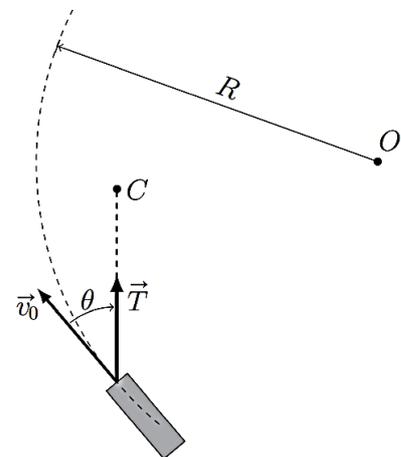
L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2$ kg, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

Dans la suite le trajet se fait donc à l'horizontale.

□ 14 — Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.

□ 15 — La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5$ s. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. fig. 4). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.



□ 16 — Déterminer en fonction des données la tension T de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

FIGURE 4 – Trajectoire circulaire du traîneau

On exprimera $\tan(\theta)$ et T en fonction de v_0 , μ_d , g , M et R .

□ 17 — Le *musher* lâche les cordes. Par une méthode énergétique, exprimer la distance parcourue par le traîneau avant de s'arrêter.

Données numériques et constantes fondamentales :

Intensité du champ de pesanteur : $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Logarithme népérien du nombre 20 : $\ln(20) \simeq 3,0$