

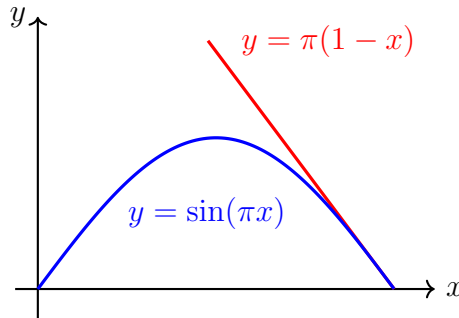
## Feuille d'exercices n°10

### Exercice 1 (\*)

Établir  $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$

**Corrigé :** La fonction  $x \mapsto \sin(\pi x)$  est concave sur  $[0; 1]$  puisqu'elle est dérivable de dérivée  $x \mapsto \pi \cos(\pi x)$  décroissante sur  $[0; 1]$ . Ainsi, sa tangente en 1 est au dessus du graphe d'où

$$\boxed{\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)}$$



### Exercice 2 (\*)

Établir  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \quad x \leq \tan(x)$

**Corrigé :** La fonction  $\tan$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  et on a  $\tan' = 1 + \tan^2$  qui croît sur l'intervalle considéré. Ainsi, la fonction  $\tan$  est convexe et considérant sa tangente en 0 qui est en dessous du graphe, il vient

$$\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \quad \tan(x) \geq x}$$

### Exercice 3 (\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})$  et  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si  $g$  l'est.

**Corrigé :** La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad g''(x) = \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{d'où} \quad \forall x > 0 \quad g''(x) = \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme  $x \mapsto \frac{1}{x}$  réalise une permutation de  $]0; +\infty[$ , les fonctions  $g''$  et  $f''$  sont de même signe et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe si et seulement si } g \text{ l'est.}}$$

### Exercice 4 (\*)

Que peut-on dire de la somme deux fonctions convexes ? de leur produit ?

**Corrigé :** Soit  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes. Soient  $(x, y) \in I^2$  et  $\lambda \in [0; 1]$ . On a

$$\begin{cases} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \end{cases}$$

et sommant ces deux lignes, on obtient

$$(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y)$$

ce qui prouve la convexité de  $f + g$ . En revanche, on ne peut rien dire concernant le produit. Par exemple, si on considère les fonctions convexes  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x$ , leur produit n'est ni convexe, ni concave. Si on impose que les fonctions soient positives, le résultat est toujours faux, par exemple en considérant  $x \mapsto (x - 1)^2$  et  $x \mapsto (x + 1)^2$  dont le produit est  $x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$ . Ainsi

Une somme de fonctions convexes est convexe mais on ne peut rien dire du produit.

### Exercice 5 (\*)

1. Une composée de fonctions convexes est-elle convexe ?
2. La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est-elle convexe ?

**Corrigé :** 1. Avec  $f : x \mapsto -x$  et  $g : x \mapsto x^2$ , on a  $f \circ g : x \mapsto -x^2$  non convexe.

Une composée de fonctions convexes n'est pas forcément convexe.

2. Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\text{Im } g \subset J$ ,  $f$  et  $g$  convexes et  $f$  croissante. Pour  $(x, y) \in I^2$  et  $\lambda \in [0; 1]$ , il vient par convexité de  $g$

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

puis par croissance de  $f$

$$f \circ g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y))$$

et par convexité de  $f$

$$f \circ g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f \circ g(x) + (1 - \lambda)f \circ g(y)$$

Ainsi

La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est convexe.

### Exercice 6 (\*)

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini,  $X$  une variable aléatoire réelle et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.

Montrer

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$$

**Corrigé :** Comme  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$  et  $\mathbb{P}(X = x) \geq 0$  pour  $x \in X(\Omega)$ , il vient d'après l'inégalité de Jensen

$$f(\mathbb{E}(X)) = f\left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)\right) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

Par transfert, on a

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(f(X))$$

On conclut

$$\boxed{f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))}$$

### Exercice 7 (\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g$  convexe. Montrer

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g \circ f$$

**Corrigé :** Soit  $n$  entier non nul. D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$g\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g \circ f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué aux fonctions continues par morceaux  $f$  et  $g \circ f$  et la continuité de  $g$

$$\boxed{g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g \circ f}$$

### Exercice 8 (\*)

Soient  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Montrer

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

**Corrigé :** La fonction  $\sqrt{\cdot}$  est concave sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après l'inégalité de Jensen, il vient

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

On conclut

$$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$$

### Exercice 9 (\*)

Soit  $\alpha \geq 1$ . Établir

$$\forall x \geq 0 \quad 1 - x^\alpha \leq \alpha(1 - x)$$

**Corrigé :** On pose  $f(x) = 1 - x^\alpha$  pour  $x \geq 0$ . La fonction  $f$  est dérivable avec  $f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1}$  pour  $x \geq 0$ . La dérivée  $f'$  décroît et on en déduit la concavité de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . Par position graphe/tangente, on a

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Et on conclut

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad 1 - x^\alpha \leq \alpha(1 - x)}$$

### Exercice 10 (\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev. Montrer qu'une intersection de parties de  $E$  convexes est convexe.

**Corrigé :** Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de convexes et  $a, b \in \bigcap_{i \in I} C_i$ . Pour  $\lambda \in [0; 1]$ , on a

$$\forall i \in I \quad \lambda a + (1 - \lambda)b \in C_i$$

c'est-à-dire

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bigcap_{i \in I} C_i$$

Ainsi

Une intersection de convexes est un convexe.

### Exercice 11 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$  convexe. Montrer

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

**Corrigé :** Par convexité, le graphe de  $f$  est sous la corde entre  $a$  et  $b$  et au-dessus de la tangente en  $\frac{a + b}{2}$  d'où

$$\forall t \in [a; b] \quad f'\left(\frac{a + b}{2}\right)\left(t - \frac{a + b}{2}\right) + f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq f(t) \leq f(a) + \tau(a, b)(t - a)$$

On intègre et on obtient

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

### Exercice 12 (\*\*)

Établir  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{\pi}$

**Corrigé :** Par concavité, on a

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin t \geq \frac{2}{\pi}t$$

Après intégration, il vient

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \int_0^x \sin t dt \geq \int_0^x \frac{2}{\pi}t dt$$

D'où

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{\pi}$$

### Exercice 13 (\*\*)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe majorée. Montrer que  $f$  est constante.  
Le résultat subsiste-t-il pour  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ?

**Corrigé :** Supposons  $f$  non constante. Il existe  $a < b$  tel  $\tau(a, b) \neq 0$ . Supposons  $\tau(a, b) > 0$ . Par croissance de  $x \mapsto \tau(a, x)$ , on trouve pour  $x > b$

$$\tau(a, x) \geq \tau(a, b) \iff f(x) \geq f(a) + (x - a)\tau(a, b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Supposons  $\tau(a, b) < 0$ . Par croissance de  $x \mapsto \tau(a, x)$ , on trouve pour  $x < a$

$$\tau(a, x) \leq \tau(a, b) \iff f(x) \geq f(a) + (x - a)\tau(a, b) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

Ainsi

La fonction  $f$  est constante.

Le résultat est faux pour  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On peut considérer  $f : x \mapsto -x$  par exemple.

### Exercice 14 (\*\*)

Soit  $p$  entier non nul et  $(u_n)_n$  suite de réels positifs telle que  $\sum u_n$  converge. Montrer que la série  $\sum \left( \prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}}$  converge.

**Corrigé :** Par concavité, on a

$$\ln \left( \prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln u_{n+i} \leq \ln \left( \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)$$

d'où 
$$\left( \prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i} = \frac{1}{p} [R_{n-1} - R_{n+p-1}]$$

et 
$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{p} [R_{n-1} - R_{n+p-1}] = \frac{1}{p} \left[ \sum_{n=0}^{p-1} R_{n-1} - \sum_{n=N+1}^{N+p} R_{n-1} \right] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p-1} R_{n-1}$$

Par comparaison pour des séries à termes positifs, on conclut

La série  $\sum \left( \prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i} \right)^{\frac{1}{p}}$  converge.