

Feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (**)

Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, concave, dérivable, croissante.

1. Montrer $\forall x > 1 \quad f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$
2. On définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n f'(k) \right) - f(n) \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^n f'(k) \right) - f(n+1)$$

Établir la convergence de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

3. Pour $f(x) = \ln(x)$ avec $x > 0$, déterminer un encadrement de $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ à $\varepsilon > 0$ près.

Corrigé : 1. Soit $x > 1$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists \alpha_x \in]x; x+1[\quad | \quad \tau(x, x+1) = f'(\alpha_x) \quad \text{et} \quad \exists \beta_x \in]x-1; x[\quad | \quad \tau(x-1, x) = f'(\beta_x)$$

Comme f est concave, la fonction f' décroît et avec l'encadrement $x-1 < \beta_x < x < \alpha_x < x+1$, on obtient

$$f'(\beta_x) \geq f'(x) \geq f'(\alpha_x)$$

autrement dit

$$\boxed{\forall x \geq 1 \quad f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)}$$

2. Soit n entier non nul. On a

$$u_n - u_{n-1} = f'(n) - f(n) + f(n-1) \leq 0 \quad v_n - v_{n-1} = f'(n) - f(n+1) + f(n) \geq 0$$

Ainsi, on a $(u_n)_n$ décroissante et $(v_n)_n$ croissante. Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \leq f(n+1) \iff u_n \geq v_n$$

En particulier, on observe que $u_n \geq v_n \geq v_0$ pour tout n entier donc $(u_n)_n$ est décroissante minorée et $v_n \leq u_n \leq u_0$ pour tout n entier donc $(v_n)_n$ est croissante majorée. D'après le théorème de limite monotone, on conclut

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \text{ convergent.}}$$

3. Pour $f(x) = \ln(x)$ avec $x > 0$, on a

$$0 \leq u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi

$$\boxed{n \geq 1 + \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \implies 0 \leq \gamma - v_n \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon}$$

Remarque : On a $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc, pour $f = \ln$, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 2 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$. Montrer

$$\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \quad f^\alpha \text{ convexe}$$

Corrigé : Supposons $\ln \circ f$ convexe. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On a

$$\ln \circ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln \circ f(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f(y)$$

Ainsi, pour $\alpha > 0$, d'après la propriété fondamentale du logarithme, il vient après multiplication par α

$$\ln \circ f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln \circ f^\alpha(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f^\alpha(y)$$

Enfin, par concavité de $\ln$, on trouve

$$\lambda \ln \circ f^\alpha(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f^\alpha(y) \leq \ln(\lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y))$$

L'implication directe s'en déduit. Supposons f^α convexe pour tout $\alpha > 0$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On a

$$\forall \alpha > 0 \quad f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y)$$

Posons $\forall \alpha \geq 0 \quad \varphi(\alpha) = \lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y) - f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y)$

On a $\varphi(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \geq 0$ (le résultat vaut aussi pour $\alpha = 0$ puisque $\varphi(0) = 0$). Par dérivation, il vient

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \varphi'(\alpha) = \lambda f^\alpha(x) \ln \circ f(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y) \ln \circ f(y) - f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \ln \circ f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

et en particulier $\varphi'(0) = \lambda \ln \circ f(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f(y) - \ln \circ f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$

Or, on a
$$\varphi'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha - 0} \geq 0$$

On conclut
$$\boxed{\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \quad f^\alpha \text{ convexe}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue.

Corrigé : Soient x_0, a, b réels tels que $a < x_0 < x < b$. D'après l'inégalité des pentes, on a

$$\tau(x_0, x) \leq \tau(x_0, b) \iff f(x) \leq f(x_0) + \tau(x_0, b)(x - x_0)$$

puis
$$\tau(a, x_0) \leq \tau(x_0, x) \iff f(x_0) + \tau(a, x_0)(x - x_0) \leq f(x)$$

Par encadrement
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} f(x_0)$$

On fait de même pour $x \rightarrow x_0^-$. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Exercice 4 (***)

Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I .

Corrigé : Soient x_0 et x_1 dans I tels que $x_0 < x_1$. D'après l'inégalité des pentes, on a

$$\forall x \in I \cap]-\infty; x_0[\quad \tau(x, x_0) \leq \tau(x_0, x_1)$$

L'application $\tau(\cdot, x_0)$ croît sur $I \cap]-\infty; x_0[$ et est majorée par $\tau(x_0, x_1)$. Par limite monotone, elle admet une limite finie en x_0^- ce qui prouve la dérivabilité de f à gauche en x_0 . On procède de même à droite et on conclut

La fonction f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I .

Remarque : On en déduit en particulier la continuité de f puisque pour $x_0 \in I$, on a

$$\forall h > 0 \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0^+)h + o(h)$$

et de même pour à gauche en x_0 .

Exercice 5 (***)

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs.

1. Établir
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Preuve : 1. L'inégalité est triviale si l'un des x_i est nul. Sinon, par concavité du $\ln$, il vient d'après l'inégalité de Jensen

$$\ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Passant à l'exponentielle, on conclut

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Le cas d'égalité est trivial si l'un des x_i est nul. Supposons les $x_i > 0$. Le sens indirect est immédiat. Supposons les x_i non tous égaux, par exemple $x_1 \neq x_2$ sans perte de généralité. On pose $y_1 = y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ puis $y_i = x_i$ pour $i \in \llbracket 3; n \rrbracket$. On a

$$\prod_{i=1}^n x_i < \prod_{i=1}^n y_i \iff x_1 x_2 < \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \iff (x_1 - x_2)^2 > 0$$

ce qui est vrai. Supposons $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. En observant $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, il vient

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

ce qui est absurde. On conclut

L'inégalité arithmético-géométrique est une égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Corrigé : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}, (x_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n \right\} \cup \{1\} \quad \text{et} \quad D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

Avec la convention $\sum_{k=1}^0 \dots = 0$, on a en particulier $D_0 = \{0, 1\}$. On note

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall \lambda \in D_n \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n entier non nul.

• Initialisation : Par calcul direct, on a

$$\forall \lambda \in D_0 = \{0, 1\} \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

• Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie avec n entier fixé. Considérons $\lambda \in D_{n+1} \setminus \{1\}$ (le cas $\lambda = 1$ est immédiat). On note

$$\lambda = \frac{x_1 + \alpha}{2} \quad \text{avec} \quad x_1 \in \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \alpha = \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{2^k} \quad \text{et} \quad (x_k)_{k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1 - \lambda)b) &= f\left(\frac{x_1 a + (1 - x_1)b}{2} + \frac{\alpha a + (1 - \alpha)b}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} [f(x_1 a + (1 - x_1)b) + f(\alpha a + (1 - \alpha)b)] \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) &\leq \frac{1}{2} [x_1 f(a) + (1 - x_1)f(b) + \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)] \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence et le cas trivial $x_1 \in \{0, 1\}$. Ainsi

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc

$$\forall \lambda \in D \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

Soit $\lambda \in [0; 1]$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n = \frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2^n \lambda - 1}{2^n} \leq \lambda_n \leq \frac{2^n \lambda}{2^n} = \lambda$$

Ainsi, par encadrement

$$(\lambda_n)_n \in D^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$$

Par continuité, on passe à la limite dans

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n a + (1 - \lambda_n)b) \leq \lambda_n f(a) + (1 - \lambda_n)f(b)$$

et on conclut

La fonction f est convexe.

Première variante : On peut aussi le rédiger sans détailler l'écriture binaire fractionnaire avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D_n = \left\{ \frac{p}{2^n}, p \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket \right\}$$

L'initialisation est identique. Détaillons l'hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Soit $\lambda \in D_{n+1}$. On a $\lambda = \frac{p}{2^{n+1}}$ avec $p \in \llbracket 0; 2^{n+1} \rrbracket$. Si p est pair, notant $p = 2q$ avec $q \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket$, on a $\lambda = \frac{q}{2^n} \in D_n$ et par hypothèse de récurrence, il s'ensuit

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

Si p est impair, notant $p = 2q + 1$ avec $q + 1 \in D_n$ car $q < 2^n$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1 - \lambda)b) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2^n}a + \left(1 - \frac{q}{2^n}\right)b\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q+1}{2^n}a + \left(1 - \frac{q+1}{2^n}\right)b\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{q}{2^n}a + \left(1 - \frac{q}{2^n}\right)b\right) + f\left(\frac{q+1}{2^n}a + \left(1 - \frac{q+1}{2^n}\right)b\right)\right] \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse de récurrence, le résultat suit.

Deuxième variante : Par l'absurde, supposons f non convexe. Ainsi, il existe $a < b$ et $c \in]a; b[$ tel que $(c, f(c))$ soit au dessus de la corde entre a et b . Posons

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = f(x) - f(a) - \tau(a, b)(x - a)$$

La fonction φ vérifie clairement la même inégalité que f et on a

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(c) > 0$$

L'ensemble $I = \{u \in [a; c] \mid \varphi(u) = 0\}$ est non vide majoré donc admet une borne supérieure α . Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$. Par continuité de φ , on a

$$0 = \varphi(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) = 0$$

ce qui prouve que $\alpha \in I$. De même, l'ensemble $J = \{u \in [c; b] \mid \varphi(u) = 0\}$ admet une borne inférieure atteinte donc un minimum β et on a

$$\forall x \in]\alpha; c] \quad \varphi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [c; \beta[\quad \varphi(x) > 0$$

En particulier
$$\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)}{2} = 0$$

ce qui est absurde. On conclut que f est convexe.

Exercice 7 (Hölder, Minkowski ****)

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, I un intervalle et f, g continues sur I , positives.

1. Soient $a, b \geq 0$. Montrer

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. On suppose f^p et g^q intégrables sur I . Montrer que fg est intégrable sur I et

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}$$

3. On suppose f^p et g^p intégrables sur I . Montrer que $(f + g)^p$ est intégrable sur I et

$$\left(\int_I (f + g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} + \left(\int_I g^p \right)^{1/p}$$

Corrigé : 1. L'inégalité est triviale si a ou b est nul. La fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$

$$\ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q = \ln ab$$

Par croissance de l'exponentielle, il vient

$$\boxed{\forall a, b \geq 0 \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Remarque : Il s'agit de l'*inégalité de Young*.

2. On suppose f, g non identiquement nulles sinon l'inégalité est triviale. Par séparation de l'intégrale, on a $\int_I f^p > 0$ et $\int_I g^q > 0$. On pose

$$u = \frac{f}{\left(\int_I f^p \right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad v = \frac{g}{\left(\int_I g^q \right)^{1/q}}$$

Ainsi

$$0 \leq uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

On en déduit l'intégrabilité de uv puis après intégration

$$\int_I uv \leq \frac{1}{p} \int_I u^p + \frac{1}{q} \int_I v^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Autrement dit

$$\boxed{\int_I fg \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} \left(\int_I g^q \right)^{1/q}}$$

Remarque : Il s'agit de l'*inégalité de Hölder*. Celle-ci généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Par convexité de $t \mapsto t^p$ sur $[0; +\infty[$ (de dérivée $t \mapsto pt^{p-1}$ croissante), on a

$$\left(\frac{f + g}{2} \right)^p \leq \frac{f^p + g^p}{2}$$

d'où l'intégrabilité de $(f + g)^p$ sur I . On suppose $\int_I (f + g)^p > 0$ sans quoi le résultat est immédiat. On écrit

$$(f + g)^p = (f + g)(f + g)^{p-1} = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$$

et on remarque

$$(f + g)^{(p-1)q} = (f + g)^p$$

Ainsi, d'après l'inégalité précédente appliquée deux fois, on obtient

$$\int_I (f + g)^p \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} \left(\int_I (f + g)^p \right)^{1/q} + \left(\int_I g^p \right)^{1/p} \left(\int_I (f + g)^p \right)^{1/q}$$

Avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, on conclut

$$\left(\int_{\mathbf{I}} (f + g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbf{I}} f^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbf{I}} g^p \right)^{1/p}$$

Remarque : Il s'agit de l'*inégalité de Minkowski*.