ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 06/10/25

Préparation à l'interrogation n°05

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$\begin{aligned}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} &= t\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\mathrm{o}(t^3)-1\right)^{-1}\\ &= \left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\mathrm{o}(t^2)\right)^{-1} = 1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\mathrm{o}(t^2) = 1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{12}+\mathrm{o}(t^2)\end{aligned}$$

2. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n}=\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=\ldots$

2 Formules

Résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

3 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

4 Calcul matriciel

1. Soient $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $\mathrm{AB}\in\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $\mathrm{AB}=(c_{i,j})$ où $c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout $(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]\times[\![1\,;\,q]\!]$;
2. Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation
$$\forall(i,j,k,\ell)\in[\![1\,;\,n]\!]^4\qquad \mathrm{E}_{i,j}\times\mathrm{E}_{k,\ell}=\delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$$
3. Soient $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB})=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$;
4. Pour $\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det \mathrm{A}=\sum\limits_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod\limits_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$;
5. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\mathrm{A}\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top=\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top\mathrm{A}=\det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$$
6. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{A}=\left(x_i^{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det(\mathrm{A})$ dit *de Vandermonde* vaut
$$\det(\mathrm{A})=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$
7. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})=r$. Il existe P,Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A}=\mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{J}_r=\mathrm{diag}(\mathrm{I}_r,0)$.

5 Algèbre linéaire

1. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. On a
$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$$
2. Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev.
On a
$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f$$
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de <u>même</u> dimension finie. On a
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$
En particulier, si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on a
$$f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathrm{E}}\} \iff \mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{E} \iff \det f \neq 0$$

6 Exercice type

On pose
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
Les matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Corrigé : Les matrices sont triangulaires donc les valeurs propres et leurs multiplicités se lisent sur la diagonale. Ainsi, les matrices A et B ont chacune 3 valeurs propres distinctes et d'après la condition suffisante de diagonalisation, on en déduit que A et B sont semblables à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$ (on choisit cet ordre) et par conséquent

$$\boxed{\text{Les matrices A et B sont semblables.}}$$

7 Exercice type

Notant $f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ pour λ réel, liberté de la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_p})$ avec les λ_i deux à deux distincts (voir exemple du cours).

8 Exercice type

Polynôme caractéristique d'une matrice compagne (voir preuve du théorème de Cayley Hamilton).

9 Exercice type

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? (voir exemple du cours)

10 Questions de cours

Réduction (jusqu'à *Diagonalisation*, inclus) , graphes usuels.