ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°21

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices par blocs

$$\mathrm{U} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline -\mathrm{B} & \lambda \mathrm{I}_n \end{array}\right)$$

1. À l'aide des matrices U et V, établir $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Corrigé : 1. Le produit par bloc donne

$$\mathrm{UV} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{AB} & \lambda \mathrm{A} \\ \hline 0 & \lambda \mathrm{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{VU} \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \hline 0 & \lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{BA} \end{array}\right)$$

Comme on a $\det(\mathrm{UV}) = \det(\mathrm{VU})$, il s'ensuit $\lambda^n \chi_{\mathrm{AB}}(\lambda) = \lambda^n \chi_{\mathrm{BA}}(\lambda^n)$. Le polynôme $\mathrm{X}^n \chi_{\mathrm{AB}} - \mathrm{X}^n \chi_{\mathrm{BA}}$ admet donc une infinité de racines et on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}}$$

2. On a
$$\overline{\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}}} = \overline{\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}\bar{\mathrm{A}})} = \det(\mathrm{XI}_n - \bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}) = \chi_{\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}}$$

Or, on sait $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} = \chi_{\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}}$ d'après le résultat précédent d'où l'égalité $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} = \overline{\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}}}$ et on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f \in \operatorname{Vect}(f, g)$$

Montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Corrigé : On a $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$ avec α, β complexes. Les cas $\alpha = \beta = 0$ et $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ont été traités antérieurement. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, posant $h = \dfrac{1}{\alpha} g$, on se ramène à $f \circ h - h \circ f = f$ déjà vu. Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, posant $h = -f$, on se ramène au cas $g \circ h - h \circ g = \beta g$. Supposons enfin α et β non nuls. On pose $h = \alpha f + \beta g$. Il vient

$$f \circ h - h \circ f = \alpha f^2 + \beta f \circ g - \alpha f^2 - \beta g \circ f = \beta(f \circ g - g \circ f) = \beta h$$

d'où h et f admettent un vecteur propre commun et par conséquent, $\dfrac{1}{\beta}(h - \alpha f)$ et f également et on conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } f \text{ et } g \text{ ont un vecteur propre commun.}}$$

Exercice 3 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{A} & 0 \end{array}\right)$.

1. Relier les sous-espaces propres de A et B.
2. Préciser les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{BX} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{AX1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mathrm{AX}_1 = \lambda^2 \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 = \lambda \mathrm{X}_1 \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \iff \lambda^2 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \lambda \mathrm{X}_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A})}$$

Remarque : On a $\chi_\mathrm{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{XI}_n & -\mathrm{I}_n \\ -\mathrm{U} & \mathrm{XI}_n \end{vmatrix}$. Les opérations $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k + \dfrac{1}{\mathrm{X}} \mathrm{L}_{k+n}$ pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ donnent

$$\chi_\mathrm{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{XI}_n - \dfrac{1}{\mathrm{X}}\mathrm{U} & 0 \\ -\mathrm{U} & \mathrm{XI}_n \end{vmatrix} = \det(\mathrm{X}^2 \mathrm{I}_n - \mathrm{U}) = \chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}^2)$$

On retrouve le lien précédemment établi sur le spectre.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. L'application $\mathrm{X}_1 \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 & \lambda \mathrm{X}_1 \end{pmatrix}$ est injective. Une base de vecteurs propres de $\mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A})$ sera donc envoyée sur une famille libre de vecteurs propres de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$. On conclut

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) = \dim \mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A})}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est valeur propre non nulle de $\mathrm{AA}^\top$, alors elle l'est aussi pour $\mathrm{A}^\top \mathrm{A}$ et les espaces propres associés ont même dimension.

Corrigé : Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{AA}^\top \mathrm{X} = \lambda \mathrm{X}$. On a $\mathrm{A}^\top \mathrm{X} \neq 0$ puisque $\lambda \mathrm{X} \neq 0$. Par suite, avec l'associativité du produit matriciel, on obtient

$$(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) \mathrm{A}^\top \mathrm{X} = \lambda \mathrm{A}^\top \mathrm{X}$$

ce qui prouve $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})$. Considérons une base $(\mathrm{X}_i)_i$ de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{AA}^\top)$. Comme $\mathrm{X}_i = \lambda^{-1} \mathrm{AA}^\top \mathrm{X}_i$, il s'ensuit que $(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}_i)_i$ est une famille libre et c'est une famille de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})$ d'après ce qui précède. Autrement dit

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{AA}^\top) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{AA}^\top) \setminus \{0\} \quad \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{AA}^\top) \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})$$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{AA}^\top) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{AA}^\top) \setminus \{0\} \quad \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{AA}^\top) = \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme *cyclique*, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathscr{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Soit F sev stable par u. Montrer que u_{F} est cyclique.

Corrigé : Notons $p = \dim \mathrm{F}$ et posons $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(x, \ldots, f^{n-p}(x))$. Pour raison de dimension, on a $\mathrm{G} \cap \mathrm{F} \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$. Soit $x_0 \in \mathrm{G} \cap \mathrm{F}$ avec $x_0 \neq 0_{\mathrm{E}}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_{n-p}[\mathrm{X}]$ tel que $x_0 = \mathrm{P}(u)(x)$. Notons $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_r \neq 0$. On a

$$\forall j \in [\![0\,; p-1]\!] \qquad f^j(x_0) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^{k+j}(x)$$

qui constitue donc une famille échelonnée dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi, la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre de cardinal p et à valeurs dans F par stabilité. Elle est donc également génératrice et est par conséquent une base de F ce qui prouve

$$\boxed{\text{L'endomorphisme induit } u_{\mathrm{F}} \text{ est cyclique.}}$$

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ l'application définie sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis étudier ses éléments propres.
Corrigé : 1. Par linéarité du produit et de l'intégrale, on a φ linéaire. Puis, par formule trigonométrique, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(f)(x) = \varphi_1(f) \sin x - \varphi_2(f) \cos x$$

avec
$$\varphi_1(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \varphi_2(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Notons $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1. On remarque sans difficulté que $\varphi_1(\mathbb{1}) = \varphi_2(\mathbb{1}) = 0$ d'où

$$\boxed{0 \in \mathrm{Sp}\,(\varphi) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_0(\varphi) = \mathrm{Ker}\ \varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\ \varphi_2}$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\varphi)$ et $\lambda \neq 0$ et soit f un vecteur propre associé. On a

$$\varphi(f) = \lambda f \iff f = \varphi\left(\frac{1}{\lambda} f\right) \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$$

Or d'après l'étude de la première question, on a constaté que

$$\mathrm{Im}\ \varphi \subset \mathrm{Vect}\,(\sin, \cos)$$

La famille $\mathscr{B} = (\sin, \cos)$ est clairement une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\sin, \cos)$ et la restriction $\varphi_{|_{\mathrm{F}}}$ induit $\varphi_{\mathrm{F}} \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$. Comme F est de dimension finie, une écriture matricielle est possible et on trouve

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} \varphi_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi_{\varphi_{\mathrm{F}}} = \mathrm{X}^2 + \pi^2$$

Il s'ensuit $\mathrm{Sp}\,(\varphi_{\mathrm{F}}) = \varnothing$ d'où 0 est la seule valeur propre réelle de φ donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_0(\varphi) = \mathrm{Ker}\ \varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\ \varphi_2}$$

Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ et vérifiant $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Établir que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U}$, alors $\lambda = 1$.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne constituée de 1. On a clairement $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{U} \neq 0$ d'où

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$$

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X} = \left(x_i\right) \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. On note $k_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $|x_{k_0}| = \underset{k \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k|$. On a

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

En particulier pour $i = k_0$, en utilisant le fait que $|x_{k_0}| \neq 0$, il vient

$$|\lambda| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \frac{x_j}{x_{k_0}} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \left| \frac{x_j}{x_{k_0}} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}$$

Ainsi
$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \implies |\lambda| \leqslant 1}$$

3. Si $|\lambda| = 1$, en reprenant l'encadrement établi à la question précédente, on a

$$|\lambda| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \frac{x_j}{x_{k_0}} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \left| \frac{x_j}{x_{k_0}} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} = 1 = |\lambda|$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire est une égalité et on dispose donc de θ réel tel que

$$\forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad x_j = x_{k_0} \left| \frac{x_j}{x_{k_0}} \right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |x_j|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \theta + \arg x_{k_0}$$

En reprenant la k_0-ème ligne de l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$, on obtient

$$\lambda\, |x_{k_0}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\, |x_j|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \implies \lambda = \frac{1}{|x_{k_0}|} \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\, |x_j| > 0$$

Par suite, on a $\lambda = |\lambda| = 1$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U} = \{1\}}$$

Exercice 8 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Établir

$$\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$$

Corrigé : Remarquons en premier lieu que $\chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{B}^\top}$ puisqu'un déterminant est invariant par transposition. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{X} \neq 0$ telle que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ et $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{Y} \neq 0$ telle que $\mathrm{B}^\top \mathrm{Y} = \mu \mathrm{Y}$ avec λ, μ des scalaires. Pour $\mathrm{M} = \mathrm{XY}^\top$, on obtient

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB} = \mathrm{AXY}^\top + \mathrm{X}\big(\mathrm{B}^\top \mathrm{Y}\big)^\top = \lambda \mathrm{XY}^\top + \mathrm{X}(\mu \mathrm{Y})^\top = (\lambda + \mu)\mathrm{XY}^\top = (\lambda + \mu)\mathrm{M}$$

et $\mathrm{M} = \left(x_i y_j\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas nulle d'où l'inclusion

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Sp}\,(\varphi)$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$ telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M}$. On a

$$\mathrm{AM} + \mathrm{MB} = \alpha\mathrm{M} \iff \mathrm{AM} = \mathrm{M}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})$$

Par récurrence immédiate, on obtient alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^k\mathrm{M} = \mathrm{M}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})^k$$

et par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{P}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})$$

Par suite $$\mathrm{M}\pi_{\mathrm{A}}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = 0$$

Comme M n'est pas nulle, il en résulte que $\pi_{\mathrm{A}}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})$ n'est pas inversible. Notant $\pi_{\mathrm{A}} = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda}$, on a donc

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} ((\alpha - \lambda)\mathrm{I}_n - \mathrm{B})^{\alpha_\lambda} \text{ non inversible}$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ tel que $\det((\alpha - \lambda)\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = 0$ ce qui équivaut à dire

$$\exists \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \quad | \quad \alpha - \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$$

ce qui prouve que $\alpha \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})}$$

Variante : On peut procéder un peu différemment pour l'inclusion $\mathrm{Sp}\,(\varphi) \subset \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$ telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M}$. On a

$$\varphi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M} \iff \mathrm{AM} = \mathrm{MC} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B}$$

Notons $r = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}$. En considérant des matrices équivalentes et par blocs (voir exercice 0 feuille 0), on montre que χ_{A} et χ_{C} ont un facteur commun de degré $r \geqslant 1$ ce qui implique une valeur propre commune λ pour A et C. Il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$, c'est-à-dire $(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$ ou encore

$$\mathrm{BX} = (\alpha - \lambda)\mathrm{X}$$

Ainsi, on a $$\alpha = \underbrace{\lambda}_{\in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} + \underbrace{\alpha - \lambda}_{\in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})}$$