

Feuille d'exercices n°19

Dans ce qui suit, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : E \rightarrow E, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. Déterminer les valeurs propres de σ .

Exercice 2 (*)

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T : E \rightarrow E, f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x t f(t) dt\right)$. Déterminer les valeurs propres de T .

Exercice 3 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$ et φ définie sur E par $\varphi(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$ pour $M \in E$. Déterminer les éléments propres de φ .

Exercice 4 (**)

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Exercice 5 (*)

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si E est de dimension finie, établir

$$\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$$

Exercice 6 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $(PQ)(f) = 0$. Montrer

$$E = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Im } P(f)$$

Exercice 7 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer χ_A .

Exercice 8 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_A avec χ_{A^T} , π_A avec π_{A^T} .

Exercice 9 ()**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \iff \chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Exercice 10 ()**

Calculer χ_A avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 11 ()**

Calculer χ_A avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 12 (*)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \text{GL}(E)$. Montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 13 (*)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Déterminer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A .

Exercice 14 ()**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer π_A .

Exercice 15 (*)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ admet-il un polynôme minimal ?

Exercice 16 (*)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = (X-1)P' - nP$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer χ_φ .