

Feuille d'exercices n°20

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier impair. Montrer que la matrice A admet une valeur propre réelle.

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

Montrer que f est nilpotent et que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $\pi_{u,x}(u)(x) = 0_E$ et divisant tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(u)(x) = 0_E$.
2. On suppose $\pi_u = P^r$ avec P irréductible et r entier non nul. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Exercice 4 (**)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$ -ev et $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les éléments propres de T .

Exercice 5 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } A = 2$. Déterminer une expression de χ_A en fonction de $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$.

Exercice 6 (***)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } X = r \geq 1$ tel que $AX = XB$. Montrer que χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré r .
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX - XB = M$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admette une unique solution.

Exercice 7 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle, alors il existe un plan vectoriel stable par A .

Exercice 8 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que χ_A divise π_A^n .

Exercice 9 (**)

Soit n entier. On définit φ sur $\mathbb{K}_n[X]$ par $\varphi(P) = P(X+1)$ pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer π_φ .

Exercice 10 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$ -ev admettant un polynôme minimal π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer $P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$
2. Montrer que si $P(u) \in \text{GL}(E)$, alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 11 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.

1. On suppose $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, on note $D_f(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$. Montrer

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_f(a_{i,i}, R_i)$$

Les ensembles $D_f(a_{i,i}, R_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin*.