# Feuille d'exercices n°21

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## Exercice 1 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices par blocs

$$\mathrm{U} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline -\mathrm{B} & \lambda \mathrm{I}_n \end{array}\right)$$

1. À l'aide des matrices U et V, établir $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

**Indications :** 1. Effectuer les produits UV et VU.
2. Utiliser la conjugaison.

## Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $f$ et $g$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f \in \operatorname{Vect}(f, g)$$

Montrer que $f$ et $g$ admettent au moins un vecteur propre commun.

**Indications :** Notant $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$ avec $\alpha$, $\beta$ complexes, traiter le cas avec $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ et enfin $\alpha$ et $\beta$ non nuls. On pourra calculer $f \circ h - h \circ f$ avec $h = \alpha f + \beta g$.

## Exercice 3 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{A} & 0 \end{array}\right)$.

1. Relier les sous-espaces propres de A et B.
2. Préciser les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A.

**Indications :** 1. Résoudre $\mathrm{BX} = \lambda \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_1$, $\mathrm{X}_2$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
2. Utiliser un argument d'injectivité.

## Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre non nulle de $\mathrm{AA}^\top$, alors elle l'est aussi pour $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ et les espaces propres associés ont même dimension.

**Indications :** Utiliser l'associativité du produit matriciel pour établir $\operatorname{Sp}(\mathrm{AA}^\top) \subset \operatorname{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})$. Pour $(\mathrm{X}_i)_i$ base de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{AA}^\top)$ avec $\lambda \neq 0$, exprimer $\mathrm{X}_i$ en fonction $\mathrm{AA}^\top\mathrm{X}_i$ et conclure.

## Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme *cyclique*, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathscr{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Soit F sev stable par $u$. Montrer que $u_{\mathrm{F}}$ est cyclique.

**Indications :** Notant $p = \dim \mathrm{F}$, considérer $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(x, \ldots, f^{n-p}(x))$, justifier que $\mathrm{G} \cap \mathrm{F} \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$ puis pour $x_0 \in \mathrm{G} \cap \mathrm{F}$ avec $x_0 \neq 0_{\mathrm{E}}$, montrer que $(x_0, \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une base de F.

## Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Phi$ l'application définie sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis étudier ses éléments propres.

**Indications :** Développer l'expression par trigonométrie puis observer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est contenue dans un plan vectoriel. Pour la recherche d'une valeur propre non nulle, considérer l'induction de $\varphi$ sur ce plan.

## Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2$ et vérifiant $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Établir que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U}$, alors $\lambda = 1$.

**Indications :** 1. Considérer la colonne U constituée de 1.
2. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. Considérer $k_0 \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ tel que $|x_{k_0}| = \underset{k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k|$.
3. Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i| \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad z_i = |z_i|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

## Exercice 8 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Établir

$$\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$$

**Indications :** Pour établir $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Sp}\,(\varphi)$, considérer $\alpha$ et M matrice non nulle telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \alpha \mathrm{M}$ puis observer $\mathrm{AM} = \mathrm{M}(\alpha \mathrm{I}_n - \mathrm{B})$ et en déduire $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{P}(\alpha \mathrm{I}_n - \mathrm{B})$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Considérer $\pi_{\mathrm{A}}$ et conclure.