ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (**)

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Corrigé : On a $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. On a $\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{M} = \det(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$ d'où M inversible dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'inverse $\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top$. Comme on a

$$\mathrm{Com}(\mathrm{M}) = \left((-1)^{i+j} \det(\mathrm{M}_{i,j})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$$

avec $\mathrm{M}_{i,j}$ matrice extraite de M par suppression de la i-ème ligne et j-ième colonne pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on en déduit que l'inverse de M est bien dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\det(\mathrm{M}^{-1}) = \det(\mathrm{M})^{-1} = 1$ d'où $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Enfin, pour $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})^2$, on a $\mathrm{MN} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ clairement et $\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M})\det(\mathrm{N}) = 1$ ce qui prouve que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et par suite

$$\boxed{(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \times) \text{ est un groupe.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ de cardinal fini n. Montrer

$$\dim \bigcap_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,) = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Tr}\,(g)$$

Corrigé : On pose $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} g$. On a clairement $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $h \in \mathrm{G}$ fixé, l'application $g \mapsto h \circ g$ est une permutation de G (d'inverse $g \mapsto h^{-1} \circ g$). Par conséquent, on a $\displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} h \circ g = \sum_{g \in \mathrm{G}} g$ d'où

$$h \circ p = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} h \circ g = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} g = p$$

Ainsi

$$p^2 = \frac{1}{n} \sum_{h \in \mathrm{G}} h \circ p = \frac{1}{n} \sum_{h \in \mathrm{G}} p = p$$

ce qui prouve que p est un projecteur. En considérant une base adaptée à p, on obtient $\mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p) = \dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p)$. Soit $g \in \mathrm{G}$. On a vu $g \circ p = p$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p)$. Alors

$$p(x) = x \quad \Longrightarrow \quad g(x) = g \circ p(x) = p(x) = x$$

autrement dit $x \in \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ d'où $\mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}\,) \subset \displaystyle\bigcap_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,)$ et l'inclusion réciproque est immédiate. On conclut

$$\boxed{\dim \bigcap_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,) = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Tr}\,(g)}$$

Exercice 3 (**)

Soit $(\mathrm{A},+,\times)$ un anneau non commutatif et $a \in \mathrm{A}$ qui possède un inverse à droite et un seul. Montrer que a possède un inverse à gauche.

Corrigé : Soit $b \in \mathrm{A}$ tel que $ab = 1$. Il vient $aba = a$ puis $a(ba-1) = 0$ d'où $a(ba-1)+ab = 1$ autrement dit $a(ba-1+b) = 1$. Par unicité de l'inverse à droite, on trouve $ba-1+b = b$ d'où $ba = 1$ ce qui prouve

Dans un anneau non commutatif, l'inversibilité à droite avec unicité implique l'inversibilité à gauche.

Exercice 4 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(\mathrm{A},+,\times)$. On définit le *radical* de I noté R(I) par

$$\mathrm{R(I)} = \{x \in \mathrm{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ x^n \in \mathrm{I}\}$$

1. Montrer que R(I) est un idéal de A contenant I.
2. Montrer que pour I, J des idéaux de A, on a

$$\mathrm{I} \subset \mathrm{J} \Longrightarrow \mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(J)} \qquad \mathrm{R(I \cap J)} = \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)} \qquad \mathrm{R(I)} + \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}$$

3. Soit I idéal de A. Montrer $\qquad \mathrm{R(R(I))} = \mathrm{R(I)}$

Corrigé : 1. On a $0_\mathrm{A} \in \mathrm{R(I)}$ puisque $0_\mathrm{A}^1 = 0_\mathrm{A} \in \mathrm{I}$. Soit $(x,y) \in \mathrm{R(I)}^2$. Il existe des entiers non nuls n et m tels que $x^n \in \mathrm{I}$ et $y^m \in \mathrm{I}$. On rappelle que dans un anneau, on a $(-y)^k = (-1)^k y^k$ pour tout k entier. Puis

$$(x-y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k (-1)^{n+m-k} y^k$$

et on a $\qquad \forall k \in [\![\, 0\,;\, n+m \,]\!] \qquad k \geqslant n \quad \text{ou} \quad n+m-k \geqslant m$

car $\qquad k < n \quad \text{et} \quad n+m-k < m \iff k < n \quad \text{et} \quad k > n$

ce qui est faux. Ainsi, pour $k \in [\![\, 0\,;\, n+m \,]\!]$, on a $x^k \in \mathrm{I}$ ou $y^{n+m-k} \in \mathrm{I}$ et par absorption

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n+m \,]\!] \qquad x^k y^{n+m-k} \in \mathrm{I}$$

et par suite $x-y \in \mathrm{I}$. Enfin, pour $(x,a) \in \mathrm{R(I)} \times \mathrm{A}$ et n entier non nul tel que $x^n \in \mathrm{I}$, on a $(xa)^n = x^n a^n \in \mathrm{I}$ par absorption et $x^1 = x \in \mathrm{I}$ d'où

Le radical R(I) est un idéal de A contenant I.

2. Supposons $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$. Soit $x \in \mathrm{R(I)}$ et n entier non nul tel que $x^n \in \mathrm{I}$. On a donc $x^n \in \mathrm{J}$ d'où $x \in \mathrm{R(J)}$. Avec cette propriété, si I et J sont des idéaux quelconques de A, on a $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \subset \mathrm{J}$ d'où $\mathrm{R(I \cap J)} \subset \mathrm{R(I)}$ et $\mathrm{R(I \cap J)} \subset \mathrm{R(J)}$ donc $\mathrm{R(I \cap J)} \subset \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)}$. Soit $x \in \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)}$ et n, m entiers non nuls tels que $x^n \in \mathrm{I}$ et $x^m \in \mathrm{J}$. Notant $p = \max(n,m)$, on a par absorption $x^p \in \mathrm{I}$ et $x^p \in \mathrm{J}$ d'où $x^p \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ ce qui prouve $\mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I \cap J)}$. Enfin, l'idéal $\mathrm{R(I+J)}$ est stable par $+$ en tant que sous-groupe de $(\mathrm{A},+)$ et comme $\mathrm{I} \subset \mathrm{I+J}$, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I+J}$, il s'ensuit $\mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(I+J)}$ et $\mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}$ d'où $\mathrm{R(I)} + \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}$. Ainsi

$\mathrm{I} \subset \mathrm{J} \Longrightarrow \mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(J)} \qquad \mathrm{R(I \cap J)} = \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)} \qquad \mathrm{R(I)} + \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}$

4. On a $\mathrm{I} \subset \mathrm{R(I)}$ d'où $\mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(R(I))}$. Soit $x \in \mathrm{R(R(I))}$. Il existe n entier non nul tel que $x^n \in \mathrm{R(I)}$ puis m entier non nul tel que $(x^n)^m = x^{nm} \in \mathrm{I}$. On en déduit clairement que $x \in \mathrm{R(I)}$ d'où

$\mathrm{R(I)} = \mathrm{R(R(I))}$

Exercice 5 (**)

Que peut-on dire d'une suite croissante d'idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$?

Corrigé : Soit $(I_n)_n$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Quitte à réindexer, on suppose que les idéaux sont non nuls (le cas d'une suite nulle est trivial). Pour n entier, il existe P_n polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que $I_n = P_n\mathbb{K}[X]$. Avec l'inclusion $P_n\mathbb{K}[X] \subset P_{n+1}\mathbb{K}[X]$ pour n entier, on en déduit $P_{n+1}|P_n$. Par conséquent, la suite $(\deg P_n)_n$ est décroissante. Comme elle est à valeurs entières, elle est stationnaire et d'après la relation de divisibilité, la suite des polynômes unitaires est également stationnaire et on conclut

$$\boxed{\text{Une suite croissante d'idéaux de } \mathbb{K}[X] \text{ stationne.}}$$

Remarque : Cette propriété est caractéristique des *anneaux noetheriens*, *i.e.* les anneaux dont les idéaux sont engendrés par un nombre fini d'éléments.

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \quad \Longrightarrow \quad x \in I \text{ ou } y \in I$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Corrigé : Soit I idéal premier de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. On suppose $I \neq \{0\}$ sinon c'est immédiat par intégrité de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Il existe P unitaire tel que $I = P\,\mathbb{K}[X]$. Si $P = AB$ avec A et B non constants, alors $AB \in I$ et $A \notin I$, $B \notin I$. On a donc nécessairement P irréductible. Supposons P irréductible qui divise AB. On a $P \wedge A$ diviseur de P donc $P \wedge A = 1$ ou P (car constant ou associé à P). Si $P \wedge A = P$, comme $P \wedge A|A$, c'est fini. Sinon, si $P \wedge A = 1$ d'après le lemme de Gauss, on a P|B. Ainsi

$$\boxed{\text{Les idéaux premiers de } (\mathbb{K}[X], +, \times) \text{ sont exactement les } P\,\mathbb{K}[X] \text{ avec P irréductible.}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $n \geqslant 2$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. On suppose qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ non constants et unitaires tels que $AB = P$. On note $r = \deg A$ et $s = \deg B$. Montrer

$$A = X^r A\left(\frac{1}{X}\right) \quad \text{et} \quad B = X^s B\left(\frac{1}{X}\right)$$

Corrigé : Notons $A = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{s} b_k X^k$. Ainsi

$$X^r A\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{r} a_{r-k} X^k \quad \text{et} \quad X^s B\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{s} b_{s-k} X^k$$

polynômes qu'on note respectivement C et D. On a $P(0) = n = A(0)B(0) = a_0 b_0$ qui sont donc non nuls d'où $\deg U = \deg A$ et $\deg V = \deg B$. Puis, les racines de A et B sont parmi les racines de P à savoir dans $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ puisque $(X-1)P = X^n - 1$. Comme A et B sont à coefficients à réels, alors si ω est racine de A ou de B, $\bar{\omega} = 1/\omega$ l'est aussi. Par conséquent, les polynômes A et C ont les même racines complexes. De plus, A et C sont de même degré et $A(1) = C(1)$ ce qui prouve que $A = C$. De même pour C et D d'où

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{X}^r \mathrm{A}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{X}^s \mathrm{B}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)}$$

Exercice 8 (**)

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer

$$\exists!(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$$

Corrigé : On note $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée à $(x_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![0\,;\, n]\!]^2$. Supposons l'existence des λ_k. Par suite

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \int_0^1 \mathrm{L}_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{L}_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence. La synthèse est alors immédiate en écrivant la décomposition de P dans la base $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à savoir $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_\mathrm{K}$, ce qui prouve

$$\boxed{\exists!(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)}$$

Exercice 9 (***)

1. Déterminer les polynômes complexes surjectifs.
2. Déterminer n entier pour que l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto z^n$ soit injective.
3. En déduire les polynômes complexes injectifs.

Corrigé : 1. Les polynômes constants sont clairement non surjectifs. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. Pour $c \in \mathbb{C}$, le polynôme non constant $\mathrm{P} - c$ admet une racine dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. Ainsi, on a

$$\forall c \in \mathbb{C} \qquad \exists z \in \mathbb{C} \quad | \quad \mathrm{P}(z) = c$$

Par conséquent $\boxed{\text{Les polynômes complexes non constants sont surjectifs.}}$

2. Notons $\varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$. Les antécédents de 1 par φ_n sont exactement les racines n-ièmes de l'unité à savoir

$$\varphi_n^{-1}(\{1\}) = \mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \right\}$$

Comme $\mathrm{Card}\ \mathbb{U}_n = n$, si φ_n est injective, alors $n = 1$. La réciproque est immédiate d'où

$$\boxed{\text{L'application définie sur } \mathbb{C} \text{ par } z \mapsto z^n \text{ est injective si et seulement si } n = 1.}$$

3. Les polynômes constants sont clairement non injectifs. Considérons $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant et injectif. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme P est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Or, par injectivité de P, celui-ci admet une unique racine d'où

$$\exists(\lambda, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}^* \quad | \ \mathrm{P} = \lambda(\mathrm{X} - \alpha)^n = \lambda \varphi_n(\mathrm{X} - \alpha)$$

Comme $z \mapsto z - \alpha$ et $z \mapsto \lambda z$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on a P injectif si et seulement si φ_n l'est et on conclut

$$\boxed{\text{Les polynômes complexes injectifs sont les polynômes de degré 1.}}$$

Exercice 10 (**)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad c_k(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, déterminer $c_k(\mathrm{P})$ en fonction des coefficients de P.
2. Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Corrigé : 1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{X}^j$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$c_k(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{j,k}}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \qquad c_k(\mathrm{P}) = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$, il vient par conjugaison

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \overline{c_k(\mathrm{P})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}_{\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = c_{-k}(\mathrm{P})$$

On en déduit $c_k(\mathrm{P}) = 0$ pour tout k entier relatif non nul puis $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$. Réciproquement, de tels polynômes sont solutions et on conclut

$$\boxed{\{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]}$$

Exercice 11 (***)

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q$ avec p, q complexes. Montrer

$$\text{P admet une racine double} \iff 4p^3 + 27q^2 = 0$$

Corrigé : Si $p = 0$, on a $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + q$ dont les racines sont les racines troisièmes de q donc P admet une racine double si et seulement si $q = 0$. Supposons $p \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\text{P admet une racine double} &\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad | \quad \begin{cases} \mathrm{P}(\alpha) = 0 \\ \mathrm{P}'(\alpha) = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad | \quad \begin{cases} \alpha^3 + p\alpha + q = 0 \\ 3\alpha^2 + p = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad | \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3}p\alpha + q = 0 \\ 3\alpha^2 + p = 0 \end{cases} \\
\text{P admet une racine double} &\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad | \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{3q}{2p} \\ 27q^2 + 4p^3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{P admet une racine double} \iff 4p^3 + 27q^2 = 0}$$

Variante : On peut aussi effectuer la division euclidienne de P par $(\mathrm{X} - \alpha)^2$ et écrire la nullité du reste mais c'est plus calculatoire.

Exercice 12 (***)

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ unitaire. Montrer que toute racine ω de P vérifie

$$|\omega| \leqslant 1 + \max_{k \in [\![0\,;n-1]\!]} |a_k|$$

Corrigé : On note $\mathrm{M} = \max_{k \in [\![0\,;n-1]\!]} |a_k|$. Si $|\omega| \leqslant 1$, l'inégalité est vraie. Supposons $|\omega| > 1$. On a

$$w^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k$$

d'où
$$|\omega|^n \leqslant \mathrm{M} \sum_{k=0}^{n} |\omega|^k = \mathrm{M} \frac{|\omega|^n - 1}{|\omega| - 1}$$

Comme $|\omega| - 1 > 0$, il vient
$$|\omega| - 1 \leqslant \mathrm{M} \frac{|\omega|^n - 1}{|\omega|^n} \leqslant \mathrm{M}$$

Ainsi
$$\boxed{|\omega| \leqslant 1 + \max_{k \in [\![0\,;n-1]\!]} |a_k|}$$

Exercice 13 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Corrigé : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On note $d = \deg \mathrm{P}$. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = 1$$

d'où
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}d\theta}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}d\theta}$$

ce qui prouve que le polynôme $\mathrm{P}\mathrm{X}^d\mathrm{P}\,(1/\mathrm{X}) - \mathrm{X}^d$ admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. On en déduit que P divise X^d et comme $d = \deg \mathrm{P}$, il vient $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{X}^d$ avec $\alpha = \mathrm{P}(1) \in \mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{Les polynômes } \pm \mathrm{X}^d \text{ sont les polynômes } \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ vérifiant } \mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}.}$$