ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{G} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi $\star$ définie par $(x,y)\star(a,b) = (xa, xb+ya)$. Montrer $(\mathrm{G},\star)$ est un groupe.

Corrigé : L'ensemble G n'est pas le sous-groupe d'un groupe connu. On vérifie sans difficultés les différentes propriétés d'un groupe. Le neutre est $(1,0)$, on a

$$((x,y)\star(a,b))\star(u,v) = (xau, xav+uxb+uya) = (x,y)\star((a,b)\star(u,v))$$

et
$$(x,y)\star(1/x,-y/x^2) = (1/x,-y/x^2)\star(x,y) = (1,0)$$

Ainsi
$$\boxed{(\mathrm{G},\star) \text{ est un groupe.}}$$

Exercice 2 (**)

Soit φ un morphisme non constant d'un groupe fini $(\mathrm{G},\star)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$. Calculer

$$\sum_{x\in\mathrm{G}} \varphi(x)$$

On pourra considérer l'application $x \mapsto a\star x$ avec $a \in \mathrm{G}$ bien choisi.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{G}$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $x \mapsto a\star x$ est une permutation de G dont la réciproque est donnée par $x \mapsto a^{-1}\star x$. Ainsi, on a

$$\sum_{x\in\mathrm{G}} \varphi(x) = \sum_{x\in\mathrm{G}} \varphi(a\star x) = \sum_{x\in\mathrm{G}} \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a)\sum_{x\in\mathrm{G}} \varphi(x)$$

Compte-tenu du choix de a, on conclut

$$\boxed{\sum_{x\in\mathrm{G}} \varphi(x) = 0}$$

Exercice 3 (*)

Soit A un anneau. On définit le *centre* de A noté Z(A) par

$$\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{A} \mid \forall a \in \mathrm{A} \qquad ax = xa\}$$

Montrer que Z(A) est un sous-anneau de $(\mathrm{A},+,\times)$.

Corrigé : On a $1_\mathrm{A} \in \mathrm{Z}(\mathrm{A})$, $0_\mathrm{A} \in \mathrm{Z}(\mathrm{A})$ ($(0_\mathrm{A}+0_\mathrm{A})a = 0_\mathrm{A}a$ d'où $0_\mathrm{A}a = 0_\mathrm{A}$ pour $a \in \mathrm{A}$) Soit $(x,y) \in \mathrm{Z}(\mathrm{A})^2$. On a

$$\forall a \in \mathrm{A} \qquad a(x-y) = ax-ay = xa-ya = (x-y)a$$

d'où $x-y \in \mathrm{Z}(\mathrm{A})$ et

$$\forall a \in \mathrm{A} \qquad a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'ensemble Z(A) est un sous-anneau de } (\mathrm{A},+,\times).}$$

Exercice 4 (*)

On pose $$\mathbb{Z}[i] = \{a + \mathrm{i}b, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif puis déterminer $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $\mathrm{N} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.

Corrigé : On a $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ et contenant 1. Puis, soit (a,b), (c,d) dans $\mathbb{Z}^2$. On a

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$$

et loi $\times$ est commutative. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est un anneau commutatif.}}$$

Notons $\mathrm{N}(z) = z\bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$ pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \mathrm{N}(a + \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$$

Soit $a + \mathrm{i}b \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$. Il existe $c + \mathrm{i}d \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = 1$ et

$$\mathrm{N}((a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d)) = \mathrm{N}(a + \mathrm{i}b)\mathrm{N}(c + \mathrm{i}d) = \mathrm{N}(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad (a,b) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

Autrement dit $$\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}]) \subset \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$$

L'inclusion réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}]) = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}}$$

Remarque : L'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est appelé *anneau des entiers de Gauss*.

Exercice 5 (**)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $x \in \mathrm{A}$ est dit *nilpotent* s'il existe n entier non nul tel que $x^n = 0_\mathrm{A}$. On note

$$\mathcal{N}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{A} \mid x \text{ nilpotent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est un idéal de A.
2. Soit $a \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Montrer que $1_\mathrm{A} - a$ est inversible.
3. Soit $a \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$ et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

Corrigé : 1. On a $0 \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Soit $(x,y) \in \mathcal{N}(\mathrm{A})^2$ et n, m entiers non nuls tels que $x^n = y^m = 0$. On a $(-x)^n = ((-1)x)^n = (-1)^n x^n = 0$ d'où $-x \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Puis

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} x^k y^{n+m-k}$$

Pour $k \in [\![\, 0\,;\, n+m \,]\!]$, on a un des deux exposants k ou $n+m-k$ suffisamment grand (on peut le voir comme une utilisation du principe des tiroirs : on doit placer $n+m$ chaussettes dans les deux tiroirs que constituent les exposants sur x et y dans la somme). Soit on a $k \geqslant n$, soit on a $k < n$ d'où $n+m-k > m$. Par suite, il vient $(x+y)^{n+m} = 0$ d'où $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ sous-groupe de $(\mathrm{A}, +)$. Enfin, pour $(a,x) \in \mathrm{A} \times \mathcal{N}(\mathrm{A})$, avec n entier tel que $x^n = 0$, on a $(ax)^n = a^n x^n = 0$ et ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{N}(\mathrm{A}) \text{ est un idéal de l'anneau A.}}$$

Remarque : L'idéal $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est appelé *nilradical* de l'anneau A.

2. Il existe n entier tel que $a^n = 0$. D'après l'identité de Bernoulli, on a

$$1 = 1 - a^n = (1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}$$

Ainsi $\boxed{\forall a \in \mathcal{N}(a) \qquad 1-a \in \mathrm{U(A)}}$

3. On a $a+b = b(1-c)$ avec $c = -b^{-1}a$ nilpotent puisque $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est un idéal. Ainsi, on a $1-c \in \mathrm{U(A)}$ et comme $\mathrm{U(A)}$ est un groupe, on conclut

$$\forall (a,b) \in \mathcal{N}(\mathrm{A}) \times \mathrm{U(A)} \qquad a+b = b(1+b^{-1}a) \in \mathrm{U(A)}$$

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(\mathrm{A}, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in \mathrm{A} \quad xy \in \mathrm{I} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathrm{I} \text{ ou } y \in \mathrm{I}$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$.

Corrigé : Soit I idéal premier de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On suppose $\mathrm{I} \neq \{0\}$ sinon c'est immédiat par intégrité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Il existe P unitaire tel que $\mathrm{I} = \mathrm{P} \cdot \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$ avec A et B non constants, alors $\mathrm{AB} \in \mathrm{I}$ et $\mathrm{A} \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{B} \notin \mathrm{I}$. On a donc nécessairement P irréductible. Supposons P irréductible qui divise AB. On a $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A}$ diviseur de P donc $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} = 1$ ou P (car constant ou associé à P). Si $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} = \mathrm{P}$, comme $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} | \mathrm{A}$, c'est fini. Sinon, si $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} = 1$ d'après le lemme de Gauss, on a $\mathrm{P} | \mathrm{B}$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les idéaux premiers de } \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ sont exactement les } \mathrm{P} \cdot \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ avec P irréductible.}}$$

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{X}^n = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{Q} + \mathrm{R} \qquad (*)$$

avec $\deg \mathrm{R} < 2$, autrement dit $\mathrm{R} = \alpha \mathrm{X} + \beta$ avec α, β scalaires.
Supposons $a \neq b$. En substituant X par a puis par b dans $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{a^n - b^n}{a-b} \\ \beta = \dfrac{ab^n - ba^n}{a-b} \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\text{Si } a \neq b, \text{ on a } \mathrm{R} = \dfrac{1}{a-b}\left((a^n - b^n)\mathrm{X} + ab^n - ba^n\right)}$

Supposons $a = b$. Notant $\mathrm{S} = (\mathrm{X}-a)^2\mathrm{Q}$, on observe que S admet a pour racine double d'où $\mathrm{S}(a) = \mathrm{S}'(a) = 0$. En substituant X par a dans $(*)$ puis dans la relation obtenue par dérivation de $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ na^{n-1} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = na^{n-1} \\ \beta = (1-n)a^n \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\text{Si } a = b, \text{ on a } \mathrm{R} = na^{n-1}\mathrm{X} + (1-n)a^n}$

Variantes : 1. Avec la formule de Taylor, on a

$$\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k = \mathrm{R} + (\mathrm{X}-a)^2\mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}'(a)(\mathrm{X}-a)$$

2. On peut aussi considérer la base des polynômes de Lagrange $\mathrm{L}_a = \dfrac{\mathrm{X}-b}{\mathrm{X}-a}$ et $\mathrm{L}_b = \dfrac{\mathrm{X}-a}{b-a}$. On a instantanément

$$\mathrm{R} = a^n\mathrm{L}_a + b^n\mathrm{L}_b$$

Exercice 8 (*)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. Déterminer r le nombre de racines de P en fonction de P et $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$.

Corrigé : Notons $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X}-\alpha_i)^{m_i}$ avec λ, α_i des complexes, λ non nul et m_i des entiers non nuls. Comme α_i racine de P' de multiplicité $m_i - 1$, on a

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X}-\alpha_i)^{m_i-1}$$

puis

$$\deg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}') = \sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) = \deg \mathrm{P} - r$$

Ainsi

$$\boxed{r = \deg \mathrm{P} - \deg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}')}$$

Exercice 9 (**)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{P}_0 = 2, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n$$

1. Calculer P_2, P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$ $\quad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $\mathrm{P}_n(2\cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n.

Corrigé :

1. Le calcul donne $\quad \boxed{\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}}$

2. On peut aisément conjecturer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

Montrons cette propriété par récurrence double. Notons :

$$\mathscr{P}(n) : \quad \mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

• Les propriétés $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont clairement vraies.
• $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$: On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n entier non nul fixé. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n &= \mathrm{X}\left(\mathrm{X}^{n+1} + \mathrm{Q}_{n+1}\right) - \mathrm{P}_n \\ &= \mathrm{X}^{n+2} + \mathrm{Q}_{n+2} \end{aligned}$$

avec $$\mathrm{Q}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{Q}_{n+1} - \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}$$

3. On procède là encore par récurrence double. Notons

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

• La vérification de $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ est immédiate.
• $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$: On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n entier fixé. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{n+2}(z + 1/z) &= (z + 1/z)\mathrm{P}_{n+1}(z + 1/z) - \mathrm{P}_n(z + 1/z) \\ &= (z + 1/z)(z^{n+1} + 1/z^{n+1}) - (z^n + 1/z^n) = z^{n+2} + 1/z^{n+2}\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Par conséquent

$$\boxed{\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n}$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'identité d'Euler, on a $2\cos(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Par suite, il vient

$$\mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = \mathrm{P}_n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

On en déduit $$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)}$$

5. A l'aide de la question précédente, déterminons les racines de P_n. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = 0 \iff 2\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

L'application $\theta \mapsto 2\cos(\theta)$ est strictement décroissante sur $[\,0\,;\pi\,]$ donc injective sur cet intervalle.

Comme on a $$0 < \frac{\pi}{2n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$$

on en déduit $$\mathrm{Card}\left\{2\cos\left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right\},\ k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]\right\} = n$$

Comme P_n est un polynôme de degré n, il admet au plus n racines et on a donc déterminé exactement toutes ses racines. Le coefficient dominant de P_n étant égal à 1, on en déduit la forme factorisée

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X} - 2\cos\left[\pi\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right]\right)}$$

Exercice 10 (*)

Soit $$\varphi : \begin{cases}\mathbb{K}_{2n-1}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{P}(0), \mathrm{P}'(0), \ldots, \mathrm{P}^{(n-1)}(0), \mathrm{P}(1), \mathrm{P}'(1), \ldots, \mathrm{P}^{(n-1)}(1))\end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Corrigé : On a $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_{2n-1}[\mathrm{X}], \mathbb{K}^{2n})$, la linéarité résultant simplement de la linéarité de la dérivation. On remarque l'égalité des dimensions

$$\dim \mathbb{K}_{2n-1}[\mathrm{X}] = \dim \mathbb{K}^{2n}$$

On a donc φ isomorphisme si et seulement si φ injective (si et seulement si φ surjective). Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\ \varphi$. On a 0 et 1 qui sont racines de P de mulitplicité n donc X^n et $(\mathrm{X}-1)^n$ divise P. Comme ces polynômes sont premiers entre eux, on a $\mathrm{X}^n(\mathrm{X}-1)^n$ divise P mais $\deg \mathrm{P} \leqslant 2n-1$. Il s'ensuit que P est le polynôme nul et par suite

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}_{2n-1}[\mathrm{X}] \text{ sur } \mathbb{K}^{2n}.}$$

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad \mathrm{P}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Corrigé : Notons $\mathrm{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $(\mathrm{L}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à X. On a $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. On choisit alors $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{x_i}\mathrm{L}_i$. On a

$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{P}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{x_i}\mathrm{L}_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{x_i}\delta_{i,j} = \sqrt[3]{x_j}}$$

Exercice 12 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$. Établir $\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\mathrm{P}^{(k)}}{k!}$

Corrigé : D'après la formule de Taylor, on a

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$$

d'où

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}\mathrm{X}^k$$

et par conséquent $\qquad \forall (x,a) \in \mathbb{K}^2 \qquad \mathrm{P}(x+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}$

d'où, en échangeant les rôles

$$\forall (a,x) \in \mathbb{K}^2 \qquad \mathrm{P}(a+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{k!}$$

Ainsi, pour $a \in \mathbb{K}$, le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+a) - \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\mathrm{P}^{(k)}}{k!}$ admet une infinité de racines et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\mathrm{P}^{(k)}}{k!}}$$

Exercice 13 (*)

On pose $\qquad \mathrm{E} = \left\{ \mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Montrer que E est un algèbre réelle commutative pour les lois usuelles.

Corrigé : Notons $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n, \mathrm{K})$ d'où $\mathrm{I}_n \in \mathrm{E}$, E est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et pour (a, b), (c, d) dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{M}(a,b)\mathrm{M}(c,d) = \mathrm{M}(ac - bd, ad + bc) = \mathrm{M}(c,d)\mathrm{M}(a,b)$$

Ceci prouve que E est une sous-algèbre commutative de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ d'où

L'ensemble E est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Exercice 14 (*)

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Corrigé : Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. On a $\varphi(1) = 1$ puis, pour $(x, y, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y) \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Ainsi $$\varphi(\mathrm{i}^2) = \varphi(-1) = -\varphi(1) = -1 = \varphi(\mathrm{i})^2$$

d'où $\varphi(\mathrm{i}) = \pm\,\mathrm{i}$. On en déduit que φ est l'identité ou la conjugaison. Réciproquement, on vérifie que ces applications sont bien des morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on conclut

Les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont l'identité et la conjugaison.