

Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 5 13/10/25 - 17/10/25

Programme :

Réduction (début) :

- Polynôme d'endomorphisme ou de matrice, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$, $\mathbb{K}[u]$ algèbre commutative, idéal des polynômes annulateurs de u , lemme des noyaux ;
- Valeur propre, vecteur propre, droite stable par un endomorphisme, sous-espace propre, polynôme d'endomorphisme et valeur propre, valeurs propres parmi les racines d'un polynôme annulateur ;
- si $u \circ v = v \circ u$, alors $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v ;
- Endomorphisme induit sur un sous-espace propre ;
- Une somme de sous-espaces propres est directe, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre ;
- Polynôme caractéristique, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, spectre d'un endomorphisme (en dimension finie) et d'une matrice, polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit ;
- Multiplicité d'une valeur propre, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre ;
- Théorème de Cayley-Hamilton ;
- Polynôme minimal, divisibilité du polynôme caractéristique, racines du polynôme minimal, dimension de $\mathbb{K}[u]$.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Pour D diagonale et $T = D + N$ avec N triangulaire supérieure stricte, forme de $P(D)$ et $P(T)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$;
2. Lemme des noyaux ;
3. Stabilité d'une droite vectorielle ;
4. Les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur (avec le résultat antérieur utile $P(u)(x) = P(\lambda)x$ si $u(x) = \lambda x$) ;
5. Endomorphisme induit sur un sous-espace propre ;
6. Une somme de sous-espaces propres est directe et son corollaire pour une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ;
7. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$;
8. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique ;
9. Calcul de χ_J avec J matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de 1 ;
10. Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre ;

11. Théorème de Cayley-Hamilton ;
12. Racines du polynôme minimal ;
13. Pour $\mathcal{B}$ base de E , on a $\pi_{\text{mat}_{\mathcal{B}}u} = \pi_u$;
14. Base de $\mathbb{K}[u]$.