# Préparation à l'interrogation n°06

## 1 Étude asymptotique

1. Développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ ;
2. Développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

## 2 Calcul matriciel

1. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $\mathrm{AB} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $\mathrm{AB} = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![ 1\,;\,n ]\!] \times [\![ 1\,;\,q ]\!]$ ;
2. Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![ 1\,;\,n ]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation
$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![ 1\,;\,n ]\!]^4 \qquad \mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$$
3. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$ ;
4. Pour $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det \mathrm{A} = \sum\limits_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ ;
5. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\mathrm{A}\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top = \mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top \mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$$
6. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{A} = \big(x_i^{j-1}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det(\mathrm{A})$ dit *de Vandermonde* vaut
$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$
7. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = r$. Il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{J}_r = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, 0)$.

## 3 Algèbre linéaire

1. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. On a
$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$$
2. Formule de Grassmann : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ sev de dimensions finies de $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$$
3. Soit $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathrm{F}$, $\mathrm{G}$ des sev de $\mathrm{E}$. On a
$$\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E} \end{cases}$$
$$\iff \exists \mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{G} \text{ bases respectives de } \mathrm{F}, \mathrm{G} \mid \mathscr{B}_\mathrm{F} \uplus \mathscr{B}_\mathrm{G} \text{ base de } \mathrm{E}$$
4. Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathrm{F}$ un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\,(f)$$
5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec $\mathrm{E}$ et $\mathrm{F}$ des $\mathbb{K}$-ev de <u>même</u> dimension finie. On a
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

## 4 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ 2. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

## 5 Dérivation

Domaine de définition, de dérivabilité puis dérivée de la fonction

$$f : x \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$$

## 6 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\varphi$ définie par $\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis que $\varphi$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

**Corrigé :** On a $\varphi$ linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit puis on trouve

$$\forall k \in [\![ 0\,;\,n ]\!] \qquad \varphi(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1}$$

Ainsi, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi$ avec $\mathscr{C}$ base canonique de E est triangulaire supérieure et on lit $\mathrm{Sp}\,(\varphi) = [\![ 0\,;\,n ]\!]$ d'où $\varphi$ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et par condition suffisante, ceci prouve que $\varphi$ est diagonalisable. Enfin, pour $k \in [\![ 0\,;\,n ]\!]$, on cherche $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(\mathrm{P}) = k\mathrm{P}$. En considérant l'équation différentielle $(x-1)y' = ky$ sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$, on trouve $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto (x-1)^k)$ comme droite vectorielle de solutions.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'application } \varphi \text{ est un endomorphisme diagonalisable et}\\ \mathrm{E}_k(\varphi) = \mathrm{Vect}\,((\mathrm{X}-1)^k) \text{ pour } k \in [\![ 0\,;\,n ]\!].\end{array}}$$

## 7 Exercice type

Diagonalisabilité des matrices de rang 1 (voir feuille 22).

## 8 Exercice type

Réduction de $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où J est la matrice constituée de 1 (voir feuille 22).

## 9 Exercice type

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ? Peut-elle être trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**Corrigé :** Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-\bar{j})$ avec $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ est annulateur de A. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \{j, \bar{j}\}$ et par conséquent $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) = \varnothing$. Si A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, on a $\pi_{\mathrm{A}}$ scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ ce qui contredit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) = \varnothing$. En revanche, le polynôme P de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé à racines simples et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ mais non trigonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

## 10 Questions de cours

Réduction, espaces vectoriels normés (début), graphes usuels.