ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 02/10/2025

Corrigé du devoir en temps libre n°04

Problème I

1. On a $f'' \geqslant f \geqslant 0$ d'où f convexe. Si f n'est pas décroissante, il existe a, b avec $0 \leqslant a < b$ et $f(a) < f(b)$. Par croissance $x \mapsto \tau(a, x)$, il vient

$$\forall x \geqslant b \qquad \tau(a,x) \geqslant \tau(a,b) \iff f(x) \geqslant f(b) + (x-a)\underbrace{\tau(a,b)}_{>0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est absurde. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe décroissante.}}$$

2. La fonction f est décroissante positive donc admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Supposons $\ell > 0$. Alors, on a $f''(t) \geqslant f(t) \geqslant \ell$ pour tout t réel d'où pour x réel

$$\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t = f'(x) - f'(0) \geqslant \ell x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) \geqslant \ell x + f'(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est absurde puisque $f' \leqslant 0$ car f décroît. Puis, la fonction f' croît puisque f est convexe et est négative puisque f décroît. Ainsi, la fonction f' admet une limite ℓ' en $+\infty$. Supposons $\ell' < 0$. On a $f'(t) \leqslant \ell'$ pour tout t réel d'où pour x réel

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) \leqslant \ell' x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leqslant \ell' x + f(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

ce qui est absurde puisque f est positive. Ainsi

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

3. Les fonctions g et h sont dérivables comme composées de telles fonctions et on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad g'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(f(x) + f'(x)\right) = \mathrm{e}^{2x} h(x) \quad \text{et} \quad h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(f''(x) - f(x)\right)$$

On en déduit la croissance de h qui est de limite nulle en $+\infty$ d'où $h(t) \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ croît et est négative et la fonction } g \text{ décroît.}}$$

4. Il en résulte notamment que $g(x) \leqslant g(0)$ pour $x \geqslant 0$ d'où

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-x}}$$

Problème II

1. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On a $\quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}$

Ainsi $$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})}$$

2.(a) On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constituant la base canonique de cet espace. Un rapide calcul montre que

$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1 \,;\, n]\!]^4 \qquad \mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{i,\ell}$$

D'après la propriété remarquable de l'application T, il vient pour $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}_{i,j}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_{i,1} \times \mathrm{E}_{1,j}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,j} \times \mathrm{E}_{i,1}) = \delta_{i,j}\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,1})$$

Ainsi $$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad \mathrm{T}(\mathrm{E}_{i,j}) = \alpha\, \delta_{i,j}}$$

2.(b) Pour $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\mathrm{E}_{i,j} \right) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\mathrm{T}(\mathrm{E}_{i,j}) \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha\, a_{i,j}\, \delta_{i,j} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \alpha\, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall \mathrm{T} \in \Lambda \qquad \mathrm{T} = \alpha\, \mathrm{Tr} \quad \text{avec} \quad \alpha = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{E}_{1,1})}$$

3. D'après ce qui précède, on a $\Lambda \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Tr}\,)$ et l'inclusion réciproque a lieu d'après la propriété fondamentale de la trace. On conclut

$$\boxed{\Lambda = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Tr}\,)}$$

Problème III

1. Le calcul donne $$\boxed{\mathrm{T}_2 = 4\mathrm{X}^2 - 1 \qquad \mathrm{T}_3 = 8\mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}}$$

2. On peut conjecturer que pour n entier, on a $\deg \mathrm{T}_n = n$ avec pour coefficient dominant 2^n et même parité que n . Prouvons cela par une récurrence double. On note

$$\mathscr{P}(n) : \quad \mathrm{T}_n = 2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$$

- $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1)$: l'initialisation est immédiate.

- $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 1. Par suite

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{n+1} &= 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1} \\ &= 2\mathrm{X}\,(2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n) - \mathrm{T}_{n-1} \\ \mathrm{T}_{n+1} &= 2^{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + [2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{T}_{n-1}] \end{aligned}$$

Posons $\mathrm{Q}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{T}_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned} \deg \mathrm{Q}_{n+1} &\leqslant \max\,(\deg 2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n, \deg \mathrm{T}_{n-1}) \\ &\leqslant \max(1 + n - 1, n - 1) = n < n + 1 \end{aligned}$$

Et $$\begin{aligned} \mathrm{T}_{n+1}(-\mathrm{X}) &= 2(-\mathrm{X})\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) - \mathrm{T}_{n-1}(-\mathrm{X}) \\ &= 2(-1)^{n+1}\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) - (-1)^{n-1}\mathrm{T}_{n-1}(\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

le dernière égalité résultant de l'égalité $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ ce qui clôt la récurrence. On a donc prouvé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}_n = 2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})}$$

3. On peut déjà signaler que le sinus ne s'annule pas sur $]\,0\,;\pi\,[$. On procède encore par récurrence double. On note

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall \theta \in \,]\,0\,;\pi\,[\quad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

• $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1)$: Soit $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$. Par trigonométrie, on a

$$\mathrm{T}_0(\cos(\theta)) = 1 = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \qquad \mathrm{T}_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$$

L'initialisation est vérifiée.

• $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 1. Par suite, pour $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) - \mathrm{T}_{n-1}(\cos(\theta)) \\
&= \frac{2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \frac{2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) - [\sin((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos((n+1)\theta)]}{\sin(\theta)} \\
\mathrm{T}_{n+1}(\cos(\theta)) &= \frac{\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) + \sin(\theta)\cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc montré

$$\boxed{\forall (n,\theta) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;\pi\,[\qquad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}$$

4. Soit n entier. D'après la propriété établie précédemment, on a pour $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \sin((n+1)\theta) = 0 \\
&\iff (n+1)\theta \in \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \\
\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \theta \in \left\{\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \,]\,0\,;\pi\,[= \left\{\frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\right\}
\end{aligned}$$

L'application $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est injective sur $]\,0\,;\pi\,[$ car strictement décroissante et par conséquent, des valeurs deux à deux distinctes de $]\,0\,;\pi\,[$ ont des images par la fonction cos qui sont également deux à deux distinctes d'où

$$\operatorname{Card}\left\{\frac{k\pi}{n+1},\ k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\right\} = \operatorname{Card}\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\right\} = n$$

Ainsi, les $\mathrm{X} - \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ divisent T_n et sont premiers entre eux d'où

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right] \text{ divise } \mathrm{T}_n$$

Or $$\deg \prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right] = n = \deg \mathrm{T}_n$$

et comme 2^n est le coefficient dominant de T_n, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right]}$$

Problème IV

1. Soit $(k,\ell) \in [\![1\,;\, n+1]\!]^2$. On a

$$\left(\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}}\right)_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n+1} \omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(\ell-1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\omega^{k-\ell}\right)^{j-1}$$

C'est une somme de racine de l'unité et en distinguant les cas, on trouve

$$\left(\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}}\right)_{k,\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } k=\ell \\ \dfrac{1-\omega^{(n+1)(k-\ell)}}{1-\omega^{k-\ell}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}} = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}}$$

On en déduit

$$\mathrm{V}\frac{1}{n+1}\bar{\mathrm{V}} = \mathrm{I}_{n+1}$$

Et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice V est inversible d'inverse } \frac{1}{n+1}\bar{\mathrm{V}}.}$$

Remarque : Pour une matrice, avoir un inverse à droite ou à gauche implique l'inversibilité et que l'inverse à droite ou à gauche est l'inverse.

2. Il vient

$$\forall \ell \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{P}(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega^{k\ell} \iff \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\omega^0) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(\omega^n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^n & \dots & \omega^{2n} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{V}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche par l'inverse de V c'est-à-dire par $\dfrac{1}{n+1}\bar{\mathrm{V}}$ chaque membre de l'égalité ci-avant, on trouve

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad a_k = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n} \bar{\omega}^{k\ell}\mathrm{P}(\omega^\ell)}$$

3. Soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n} \left|\bar{\omega}^{k\ell}\mathrm{P}(\omega^\ell)\right| \leqslant \operatorname*{Max}_{\ell \in [\![0\,;\, n]\!]} \left|\mathrm{P}(\omega^\ell\right|$$

On conclut

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad |a_k| \leqslant \operatorname*{Sup}_{z \in \mathbb{U}} |\mathrm{P}(z)|}$$