

Devoir en temps libre n°04

Problème I

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive, bornée telle que $f \leq f''$.

1. Montrer que f est convexe et décroissante.

2. Établir
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

3. On pose $\forall x \geq 0 \quad g(x) = f(x)e^x \quad \text{et} \quad h(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}$

Étudier les variations de h et de g ainsi que le signe de h .

4. En déduire
$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq f(0)e^{-x}$$

Problème II

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On note

$$\Lambda = \{T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \mid \forall (A, B) \in E^2 \quad T(AB) = T(BA)\}$$

1. Établir
$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

2. Soit $T \in \Lambda$ et $\alpha = T(E_{1,1})$.

(a) Déterminer $T(E_{i,j})$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

(b) En déduire une relation entre T et la trace Tr .

3. Conclure en décrivant Λ en fonction de Tr .

Problème III

Soit $(T_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

1. Calculer T_2, T_3 .

2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n .

3. Montrer que
$$\forall \theta \in]0; \pi[\quad T_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

4. En déduire une expression factorisée de T_n .

Problème IV

Soit n entier non nul et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose $V = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$.

1. Calculer $V\bar{V}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.
2. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, déterminer une expression simple de a_k en fonction des $P(\omega^\ell)$ avec $\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

3. En déduire
$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad |a_k| \leq \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$$