Corrigé du devoir en temps libre n°03

Problème I

1. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n$. Pour n entier non nul, on a $\mathrm{P}_{n-1} \neq 0$ sans quoi $(\mathrm{P}_n)_n$ serait de limite nulle et

$$u_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell}{\ell}$$

D'où $$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

2. Par définition, le produit $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si $\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ admet une limite finie non nulle, autrement dit, passant au logarithme, si et seulement si $\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right)_n$ admet une limite finie. Par conséquent, on a

$$\prod(1+u_n) \text{ converge} \iff \sum \ln(1+u_n) \text{ converge}$$

Or, on a $\ln(1+u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors il vient $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on obtient

$$\sum \ln(1+u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Et on conclut $$\boxed{\prod(1+u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}}$$

3. Comme ci-avant, on a

$$\prod(1-u_n) \text{ converge} \iff \sum \ln(1-u_n) \text{ converge}$$

On a également $\ln(1-u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors il vient $\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$. D'après le critère des équivalents pour des séries à termes de signe constant, on obtient

$$\sum \ln(1-u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Et on conclut $$\boxed{\prod(1-u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}}$$

Problème II

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Cette série est donc convergente ce qui prouve

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, la quantité } \mathrm{R}_n \text{ est bien définie en tant que reste de série de convergente.}}$$

2. Par contrôle du reste d'une série alternée vérifiant le critère des séries alternées, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum \mathrm{R}_n$ converge absolument et on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \mathrm{R}_n \text{ converge.}}$$

3. Soit N entier. On a en changeant l'ordre de sommation

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \left(\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{k^2} + \mathrm{R}_\mathrm{N} \right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^k}{k^2} + \mathrm{N}\mathrm{R}_\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{k} + \mathrm{N}\mathrm{R}_\mathrm{N}$$

D'après le contrôle du reste établi à la question précédente, on a

$$\mathrm{N}\mathrm{R}_\mathrm{N} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \mathrm{N}\,\mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

On conclut $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = -\ln(2)}$$

Remarque : Sous réserve de convergence, on pourrait être tenté d'utiliser le théorème de Fubini sur la somme double

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \mathbb{1}_{[\![n+1\,;+\infty [\![}(k) \right)$$

Mais cette démarche échoue car on n'a pas sommabilité. Par comparaison série/intégrale, on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

d'où la non-sommabilité de la famille considérée.

Problème III

1. On pose $\varphi(x) = x - \mathrm{th}\,(x)$ pour $x \geqslant 0$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)^2} \geqslant 0$$

Ainsi, la fonction φ croît avec $\varphi(0) = 0$ d'où $\mathrm{th}\,(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$$

Et par récurrence immédiate, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}}$$

2. On pose $v_n = 2^n u_n$ pour n entier. Puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{th}\,(u_n)}{u_n}\right)$$

On a le développement limité $\mathrm{th}\,(u) = u + \mathrm{O}(u^2)$ (la fonction th est impaire) puis

$$\ln\left(\frac{\operatorname{th}(u_n)}{u_n}\right) = \ln(1+\mathrm{O}(u_n))$$

Comme $\mathrm{O}(u_n) = u_n\mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(1)$, on obtient

$$\ln\left(\frac{\operatorname{th}(u_n)}{u_n}\right) = \mathrm{O}(u_n) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, la série $\sum [\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)]$ converge ce qui prouve la convergence de la suite $(\ln(v_n))_n$ et par conséquent, il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{C}$, autrement dit

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{2^n}}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(u) &\underset{u\to 0}{=} \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} = \left(1+\frac{u^2}{2}+\mathrm{o}(u^2)\right)^{-1}\left(u+\frac{u^3}{6}+\mathrm{o}(u^3)\right)\\ &= \left(1-\frac{u^2}{2}+\mathrm{o}(u^2)\right)\left(u+\frac{u^3}{6}+\mathrm{o}(u^3)\right) = u + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)u^3+\mathrm{o}(u^3) = u - \frac{u^3}{3}+\mathrm{o}(u^3)\end{aligned}$$

Puis, pour n entier $\quad v_{n+1} - v_n = 2^n(\operatorname{th}(u_n) - u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{C}^3}{3} \times \frac{1}{2^{2n}} < 0$

D'après le critère des équivalents, la série $\sum [v_{n+1} - v_n]$ converge et par sommation des relations de comparaison

$$\sum_{k=n}^{+\infty} [v_{k+1} - v_k] \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{C}^3}{3}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{4^n} = -\frac{4\mathrm{C}^3}{9}\times\frac{1}{4^n}$$

Ainsi
$$v_n = \mathrm{C} + \frac{4\mathrm{C}^3}{9}\times\frac{1}{4^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

On conclut
$$\boxed{u_n = \frac{\mathrm{C}}{2^n} + \frac{4\mathrm{C}^3}{9}\times\frac{1}{8^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{8^n}\right)}$$

Problème IV

Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k^{1/4}}$ pour n entier. Pour p entier non nul, on pose $\mathrm{U}_p = \mathrm{S}_{p^2-1}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k^{1/4}} = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}\frac{(-1)^p}{k^{1/4}} = (-1)^p\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}\frac{1}{k^{1/4}}$$

Par monotonie, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}\frac{1}{k^{1/4}} \geqslant \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1}\frac{1}{\sqrt{p+1}} = \frac{2p+1}{\sqrt{p+1}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi, la série téléscopique $\sum_{p\geqslant 1} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p]$ diverge grossièrement d'où la divergence de la suite $(\mathrm{U}_p)_{p\geqslant 1}$ c'est-à-dire de la suite $(\mathrm{S}_{p^2-1})_{p\geqslant 1}$ extraite de la suite des sommes partielles. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{1/4}} \text{ diverge.}}$$

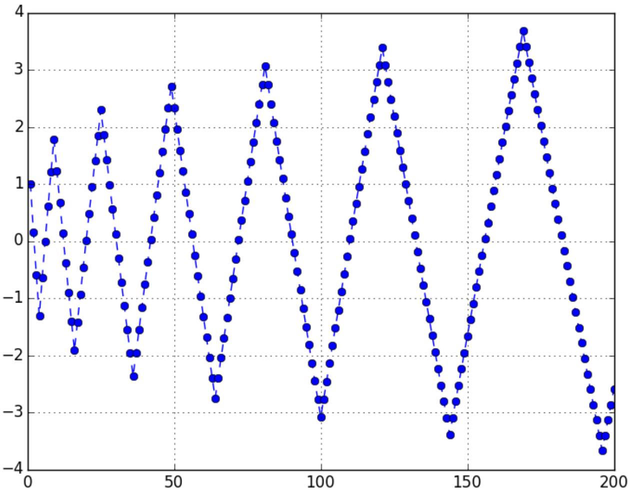

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$