

Devoir en temps libre n°05

Problème I

Soit n entier non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose

$$\forall P \in E \quad \varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de E .
2. Justifier que φ est diagonalisable et préciser ses éléments propres (spectre et base de diagonalisation).

Problème II

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe B et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec B diagonalisable, N nilpotente telles que $A = B + N$ et $BN = NB$.

La décomposition précédemment obtenue est dite *décomposition de Dunford*. On admettra l'unicité d'une telle décomposition.

2. Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Problème III

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in E$ et Φ définie par

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM + MA$$

1. Justifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. On suppose A nilpotente. Montrer que Φ l'est également.
On pourra chercher une expression de $\Phi^k(M)$ pour k entier et $M \in E$.
3. On suppose A diagonalisable avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(a) On pose $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad M_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$

Calculer $\Phi(M_{i,j})$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

- (b) En déduire que Φ est diagonalisable et préciser une base de diagonalisation.

Problème IV (bonus)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in E$ et Φ définie par

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM + MA$$

On suppose Φ diagonalisable et on note $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de diagonalisation de Φ associée aux valeurs propres $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Justifier qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tels que $AX = \mu X$.
2. Montrer que $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Justifier que $\bar{X}^\top X > 0$ puis calculer MX avec $M = \frac{1}{\bar{X}^\top X} Y \bar{X}^\top$.
4. En déduire que $(M_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
5. Pour $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, déterminer $AM_{i,j}X$ en fonction de $\lambda_{i,j}$, μ et $M_{i,j}X$.
6. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. En considérant $\text{Tr}(A)$, établir que $\mu \in \mathbb{K}$ et conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.