ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°24

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On définit le *commutant* de f par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. On suppose f nilpotente d'indice n. Déterminer $\mathscr{C}(f)$.
3. On suppose seulement f trigonalisable. Montrer $\dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

Corrigé : 1. L'ensemble $\mathscr{C}(f)$ contient $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et est stable par combinaison linéaire par linéarité de la composition d'où

$$\boxed{\text{Le commutant } \mathscr{C}(f) \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrons que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $(\alpha_k)_{k\in[\![0\,;\,n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En appliquant f^{n-1} dans cette égalité, il vient

$$f^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^k(x_0)\right) = \alpha_0 f^{n-1}(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k f^{k-1}(f^n(x_0)) = \alpha_0 \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0_\mathrm{E}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha_0 = 0$$

En répétant le procédé, on montre la nullité de tous les α_k d'où la liberté de $\mathscr{B}$ et comme $\operatorname{Card} \mathscr{B} = \dim \mathrm{E}$, la famille $\mathscr{B}$ est une base de E. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. On dispose de $(a_k)_{k\in[\![0\,;\,n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$. Posons $h = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. Comme g commute avec f, alors g commute avec f^i pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned} g\left(f^i(x_0)\right) &= g \circ f^i(x_0) = f^i \circ g(x_0) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right)(f^i(x_0)) = h(f^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes g et h coïncident sur $\mathscr{B}$ et par caractérisation d'une application linéaire sur une base, il s'ensuit que $g \in \mathbb{K}[f]$ d'où $\mathscr{C}(f) \subset \mathbb{K}[f]$. L'inclusion réciproque est immédiate d'où

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

3. Soit $\mathscr{B}$ une base de trigonalisation de f et $\mathrm{T} = \operatorname{mat}_\mathscr{B} f \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (espace des matrices triangulaires supérieures). Notant

$$\mathscr{C}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad|\quad \mathrm{MT} = \mathrm{TM}\}$$

on a clairement $\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) = \dim \mathscr{C}(f)$. Considérons la dimension de l'espace de solutions de l'équation

$$\mathrm{MT} - \mathrm{TM} = 0 \tag{S}$$

d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$. Les termes diagonaux donnent les équations triviales

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad m_{i,i}t_{i,i} - t_{i,i}m_{i,i} = 0$$

Par conséquent, le système (S) possède $\dfrac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\dfrac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Comme le rang de (S) est majorée par le nombre d'équations, il s'ensuit

$$\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \geqslant \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \geqslant n$$

Ainsi $$\boxed{\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \geqslant \dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \geqslant n}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Corrigé : Par une récurrence immédiate, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^k & 0 \\ \hline k\mathrm{A}^k & \mathrm{A}^k \end{array}\right)$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & 0 \\ \hline \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{array}\right)$$

Si B est diagonalisable, on peut choisir P scindé à racines simples qui annule B. Par conséquent, on a également $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) = 0$. Le polynôme P étant scindé à racines simples, les racines de P' sont distinctes de celles de P d'où $\mathrm{P} \wedge \mathrm{XP}' = 1$ ou X. Or, on a $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P}$ et $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{XP}'$ d'où $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P} \wedge \mathrm{XP}'$ et $\deg \pi_{\mathrm{A}} \geqslant 1$ ce qui prouve $\pi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$ et donc $\mathrm{A} = 0$. La réciproque est évidente. On conclut

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \text{ diagonalisable } \iff \mathrm{A} = 0}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n entier non nul vérifiant $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_2$. Établir $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Corrigé : Le polynôme $\mathrm{X}^n - 1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}})$ est annulateur de M et scindé à racines simples. Il s'ensuit que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \mathbb{U}_n$. Les racines de χ_{M} sont donc racines n-ièmes de l'unité et on a $\chi_{\mathrm{M}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ donc les racines sont toutes deux réelles ou complexes conjuguées. Si $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}$, la matrice M peut être semblable (et donc égale) à I_2 ou $-\mathrm{I}_2$ ou aussi semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la position du signe n'importe pas, il suffit d'échanger les colonnes dans la matrice de passage) d'où M^2 semblable (et donc égale) à I_2 et le résultat suit pour tous ces cas. Si le spectre de M n'est pas réel, la matrice M est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a

$$\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{X} + \det \mathrm{M} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \in \mathbb{Z}$$

La trace étant un invariant de similitude, on obtient $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 2\cos\theta \in [\![-1\,;\,1]\!]$. Le cas $\cos\theta = 0$ correspond à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\;[\pi]$ d'où M semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ et par conséquent M^4 semblable (et donc égale) à I_2. Le cas $\cos\theta = 1$ correspond à $\theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}\;[\pi]$ d'où M semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \end{pmatrix}$ d'où M^3 semblable (et donc égale) à I_2. Le cas $\cos\theta = -1$ se traite de manière analogue. Ainsi, il existe toujours un diviseur d de 12 tel que $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_2$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2}$$

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. On note $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}$ la famille de projecteurs associés à la somme directe $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Montrer

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$$

Corrigé : On note $(\mathrm{L}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $\mathrm{Sp}\,(u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. On a $\mathrm{L}_\lambda(\mu) = \delta_{\mu,\lambda}$ pour $\mu \in \mathrm{Sp}\,(u)$. Avec la propriété $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\mu)x$ pour $x \in \mathrm{E}_\mu(u)$, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{E}_\lambda(u) \qquad \mathrm{L}_\lambda(u)(x) = \mathrm{L}_\lambda(\lambda)x = x$$

et $$\forall x \in \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}\,(u)\smallsetminus\{\lambda\}} u_\mu \in \bigoplus_{\mu\in\mathrm{Sp}\,(u)\smallsetminus\{\lambda\}} \mathrm{E}_\mu(u) \qquad \mathrm{L}_\lambda(u)(x) = \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}\,(u)\smallsetminus\{\lambda\}} \mathrm{L}_\lambda(\mu)x_\mu = 0$$

Autrement dit $$\mathrm{L}_\lambda(u) = p_\lambda$$

On conclut $$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Décrire les sev stables par u.

Corrigé : Soit F un sev stable par u. L'endomorphisme induit u_F est diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres de u et des valeurs propres qui sont parmi celles de u. Ainsi, on a

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u_\mathrm{F})} \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}\,(u_\mathrm{F}) \subset \mathrm{Sp}\,(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_\mathrm{F}) \qquad \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F}) \text{ sev de } \mathrm{E}_\lambda(f)$$

Notant $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F})$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_\mathrm{F})$ et $\mathrm{F}_\lambda = \{0\}$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(u_\mathrm{F})$, on peut donc écrire

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \quad \text{avec} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \mathrm{F}_\lambda \text{ sev de } \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Réciproquement, un sev de la forme $\mathrm{F} = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda$ avec F_λ sev de $\mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ est stable par u. En effet, pour $x \in \mathrm{F}$, il existe $(x_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}$ tel que $x = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$. Puis

$$u(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} u(x_\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \lambda x_\lambda \in \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les sev stables par } u \text{ sont exactement les } \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \text{ avec les } \mathrm{F}_\lambda \text{ des sev respectifs des } \mathrm{E}_\lambda(u).}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable.

1. Si $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(u) = n$, déterminer le nombre de sev stables par u.
2. Que peut-on dire si $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(u) < n$?

Corrigé : 1. Comme u admet n valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit F sev stable par u. L'endomorphisme induit u_F est diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres de u et des valeurs propres qui sont parmi celles de u. Ainsi, on a

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F}) \subset \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Or, on a $\dim \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F}) \geqslant 1$ et $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = 1$ pour $\lambda \in \mathrm{I}$, on en déduit que

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_\lambda(u) \quad \text{avec} \quad \mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$$

Réciproquement, pour $\mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$, on vérifie sans difficulté que $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$ est un sev stable par u. Ainsi, les sev stables par u sont exactement les $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_\lambda(u)$ avec $\mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$. Ainsi, le nombre de sev stables par u est le nombre de parties de $\mathrm{Sp}\,(u)$. Comme $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(u) = n$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ parties de $\mathrm{Sp}\,(u)$ et on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(u) = n, \text{ il y a } 2^n \text{ sev stables par } u.}$$

2. Si $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(u) < n$, alors il existe λ valeur propre de multiplicité $m_\lambda(u) > 1$. On a $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ car u est diagonalisable et par conséquent, l'espace propre $\mathrm{E}_\lambda(u)$ contient un plan vectoriel qu'on peut noter $\mathrm{Vect}\,(x, y)$ avec (x, y) famille libre dans $\mathrm{E}_\lambda(u)$. Notons $\mathrm{D}_n = \mathrm{Vect}\,(x + ny)$ avec n entier. Pour n, m entiers distincts, on a $(x + ny, x + my)$ libre. En effet, soit α, β des scalaires. Il vient

$$\alpha(x + ny) + \beta(x + my) = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ n\alpha + m\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi, les sev $(\mathrm{D}_n)_n$ sont deux à deux distincts et ils sont clairement par stables par u. On conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(u) < n, \text{ il y a une infinité de sev stables par } u.}$$

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{AB} = 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soient triangulaires supérieures.

Corrigé : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}^n$ et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ respectivement canoniquement associés à A et B. On a $u \circ v = 0$ d'où $\mathrm{Im}\; v \subset \mathrm{Ker}\; u$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E obtenue par complétion d'une base de $\mathrm{Ker}\; u$. On a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A}_1 \\ \hline 0 & \mathrm{A}_2 \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

avec $\mathrm{B}_1 \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C})$ et $\mathrm{A}_2 \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ où $r = \dim \operatorname{Ker} u$. Il existe $\mathrm{P}_2 \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{P}_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}_2^{-1}\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2$ et $\mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{B}_1\mathrm{P}_1$ soient triangulaires supérieures. Alors, considérant la matrice par blocs $\mathrm{P} = \operatorname{diag}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$, on a P inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \operatorname{diag}(\mathrm{P}_1^{-1}, \mathrm{P}_2^{-1})$ et un produit par blocs donne

$$\mathrm{P}^{-1}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A}_1 \\ \hline 0 & \mathrm{A}_2 \end{array}\right)\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{A}_1\mathrm{P}_2 \\ \hline 0 & \mathrm{P}_2^{-1}\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{B}_1\mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{B}_2\mathrm{P}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

qui sont toutes deux triangulaires supérieures. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \text{ et } \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} \text{ soient triangulaires supérieures.}}$$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$$

Le résultat subsiste-t-il pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$?

Corrigé : Le sens direct est immédiat en considérant une base de vecteurs propres. Réciproquement, on a

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f^2) \smallsetminus \{0\}} \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{id}) \right)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\pm\,\mu(\lambda)$ les racines carrées complexes. Ainsi, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{X}^2 - \lambda = (\mathrm{X} - \mu(\lambda))(\mathrm{X} + \mu(\lambda)) \quad \text{avec} \quad (\mathrm{X} - \mu(\lambda)) \wedge (\mathrm{X} + \mu(\lambda)) = 1$$

D'après le lemme des noyaux, il vient

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f^2) \smallsetminus \{0\}} \operatorname{Ker}(f - \mu(\lambda) \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu(\lambda) \operatorname{id}) \right)$$

Comme $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ (éventuellement réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$), on a montré que E est somme directe des sous-espaces propres de f d'où f diagonalisable. Ainsi

$$\boxed{f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2}$$

Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, le résultat est faux en considérant f canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $f^2 = \operatorname{id}$ et f n'est pas diagonalisable.

Exercice 9 (****)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} \iff \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^k) = \operatorname{Tr}(\mathrm{B}^k)$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat : si $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}}$, alors les matrices A et B ont même valeurs propres et mêmes multiplicités et le résultat suit par trigonalisation de A et de B. Supposons

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^k) = \operatorname{Tr}(\mathrm{B}^k)$$

Par linéarité de la trace, on a $\operatorname{Tr}(\mathrm{P}(\mathrm{A})) = \operatorname{Tr}(\mathrm{P}(\mathrm{B}))$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Supposons $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \neq \operatorname{Sp}(\mathrm{B})$ avec par exemple $\mu \in \operatorname{Sp}(\mathrm{B}) \smallsetminus \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$. Soit $(\mathrm{L}_\lambda)_\lambda$ la famille de polynômes interpolateurs associés à $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cup \{\mu\}$. L'ensemble $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cup \{\mu\}$ est de cardinal au plus $n+1$. Les polynômes L_λ sont donc de degré au plus n. Par trigonalisation pour A et B, on trouve

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\mu(\mathrm{A})) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\mu(\mathrm{B})) = m_\mu(\mathrm{B}) \quad \text{avec} \quad m_\mu(\mathrm{B}) \geqslant 1$$

ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$. Considérant la famille $(\mathrm{L}_\lambda)_\lambda$ (abus de notation ...) associée à $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$, on trouve

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \qquad m_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{A})) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{B})) = m_\lambda(\mathrm{B})$$

Ainsi, les polynômes χ_A et χ_B de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ ont même racines avec mêmes multiplicités et sont unitaires. On conclut

$$\boxed{\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B} \iff \forall k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k)}$$