

Feuille d'exercices n°22

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (*)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, préciser la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (*)

Montrer que la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1 est diagonalisable et préciser une matrice de passage associée.

Exercice 4 (**)

Soit $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice 5 (**)

Soit $n \geq 2$. Diagonaliser la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \text{ ou } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6 (*)

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il convexe ? est-il un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 7 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ libre. Montrer que A est diagonalisable puis préciser $\text{Sp}(A)$.

Exercice 8 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 9 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$ avec $\text{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\text{Tr } \varphi$ et $\det \varphi$.

Exercice 10 (*)

Les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose A inversible. Montrer l'équivalence

$$A \text{ triangulaire supérieure} \iff \forall k \geq 2 \quad A^k \text{ triangulaire supérieure}$$

2. L'équivalence précédente a-t-elle lieu sans l'hypothèse d'inversibilité de A ?

Exercice 12 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n - A$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis établir $\det(A) > 0$.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x \in E \mid (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ base de E ;
2. les valeurs propres de f sont simples ;
3. $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ base de $\mathbb{K}[f]$.

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v .