ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°23

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$. Résoudre $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_0 & \dots x_{p-1} \end{pmatrix}$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 4 (****)

On pose $$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_n = \chi_{\mathrm{A}_n}$$

1. En considérant $\mathrm{P}_n(2\cos(\theta))$ avec $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$, déterminer une expression factorisée de P_n.
2. En déduire que A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \varphi \text{ diagonalisable}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisables tels que $u^3 = v^3$. Montrer que $u = v$.

Exercice 8 (****)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement s'il existe un plan vectoriel F stable par u et $\mathscr{B}$ une base de F tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent. Montrer que $\det(u+v) = \det u$.

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que $$\text{A diagonalisable} \iff \text{B diagonalisable}$$

Exercice 11 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. On définit le *commutant* de f par
$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad | \quad f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer : $\qquad g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f) \qquad \mathrm{E}_\lambda(f)$ stable par g
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(f)$.
4. Si les valeurs propres de f sont simples, montrer que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 12 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis montrer que si A et B sont diagonalisables, alors φ l'est.

Exercice 13 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer
$$\text{A nilpotente} \iff \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0$$

Exercice 14 (***)

Pour $n \geqslant 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.