

## Feuille d'exercices n°24

Dans ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 1 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On définit le *commutant* de  $f$  par

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que  $\mathcal{C}(f)$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. On suppose  $f$  nilpotente d'indice  $n$ . Déterminer  $\mathcal{C}(f)$ .
3. On suppose seulement  $f$  trigonalisable. Montrer  $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$ .

**Indications :** 2. Justifier qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$  puis comparer  $\mathcal{C}(f)$  à  $\mathbb{K}[f]$ .

3. Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  triangulaire, considérer le système  $AM - MA = 0$  et compter le nombre d'équations et d'inconnues. On pourra détailler les équations concernant les coefficients diagonaux du système.

### Exercice 2 (\*\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que  $B$  soit diagonalisable.

**Indications :** Déterminer une forme par blocs simple de  $B^k$  pour  $k$  entier non nul et en déduire  $P(B)$  pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Utiliser ensuite la caractérisation d'une matrice diagonalisable à l'aide d'un polynôme annulateur.

### Exercice 3 (\*\*\*)

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  telle qu'il existe  $n$  entier non nul vérifiant  $M^n = I_2$ . Établir  $M^{12} = I_2$ .

**Indications :** Observer que  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  puis distinguer le cas  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$  ou pas. On pourra alors considérer la trace de  $M$ .

### Exercice 4 (\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On note  $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$  la famille de projecteurs associés à la somme directe  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ . Montrer

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$$

**Indications :** Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.

### Exercice 5 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. Décrire les sev stables par  $u$ .

**Indications :** En considérant  $u_F$  avec  $F$  stable par  $u$ , montrer que  $F$  peut s'écrire comme somme (directe) de sev des sous-espaces propres de  $u$ .

### Exercice 6 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

1. Si  $\text{Card Sp}(u) = n$ , déterminer le nombre de sev stables par  $u$ .
2. Que peut-on dire si  $\text{Card Sp}(u) < n$ ?

**Indications :** 1. Observer que les sous-espaces propres de  $u$  sont des droites vectorielles puis, pour  $F$  stable, montrer que  $F$  est somme de sous-espaces propres de  $u$  en considérant  $u_F$ . En déduire que le choix d'une partie de  $\text{Sp}(u)$  équivaut au choix d'un sev stable par  $u$ .  
2. Justifier l'existence d'un plan vectoriel stable puis construire une infinité de droites vectorielles stables dans ce plan.

### Exercice 7 (\*\*\*)

Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB = 0$ . Montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  soient triangulaires supérieures.

**Indications :** Notant  $u, v$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  respectivement canoniquement associées à  $A$  et  $B$ , considérer  $\mathcal{B}$  une base obtenue par complétion d'une base de  $\text{Ker } u$ .

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ . Montrer que

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

Le résultat subsiste-t-il pour  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ?

**Indications :** Pour le sens indirect, observer que

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f^2) \setminus \{0\}} \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}) \right)$$

puis factoriser  $(X^2 - \lambda)$  en notant  $\pm \mu(\lambda)$  les racines carrées complexes de  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

### Exercice 9 (\*\*\*\*)

Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer

$$\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$$

**Indications :** Établir  $\text{Tr}(P(A)) = \text{Tr}(P(B))$  pour  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  puis considérer des polynômes bien choisis.