

Commentaires - Devoir en temps libre n°2

Remarques générales : Certains travaux sont réalisés dans une absence totale de soin de rédaction. Ce n'est pas acceptable. Par ailleurs, on commence l'étude d'une intégrale à paramètre en posant

$$\forall X \times I \quad f(x, t) = \dots \quad \text{avec} \quad X = \dots \quad I = \dots$$

Problème I

1. L'intégrande est continue par morceaux sur le segment $[0; \pi]$ d'où son intégrabilité sur cet intervalle. On pouvait observer

$$1 - 2x \cos t + x^2 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t = |x - e^{it}|^2$$

ou minorer

$$1 - 2x \cos t + x^2 \geq 1 - 2|x| + x^2$$

avec $(t, x) \in [0; \pi] \times]-1; 1[$ et conclure à la stricte positivité du terme dans le ln. Il n'était pas nécessaire d'invoquer un théorème d'intégrale à paramètre et ouvrir les bornes en 0 et π n'était pas très heureux puisque l'intégrale y est artificiellement faussement impropre.

2. Il faut impérativement tenter une domination et la dominante choisie doit être indépendante du paramètre. Il y a eu de très nombreuses confusions concernant la bonne gestion du dénominateur : celui-ci doit être minoré pour qu'après passage à l'inverse, on ait une majoration. Une domination locale était requise et le plus adapté est de considérer un intervalle centré $[-a; a] \subset]-1; 1[$ afin d'éviter des disjonctions de cas :

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times [0; \pi] \quad 1 - 2x \cos t + x^2 = |e^{it} - x|^2 \geq (1 - |x|)^2 \geq (1 - a)^2$$

Pour une situation non triviale comme celle de l'énoncé, le choix d'une dominante mérite une explication ! Enfin, on ne procède pas à une domination locale pour $x \in]-a; a[$ puisque le choix $a = 1$ est alors possible et la domination locale n'a donc plus rien de local ... Enfin, on n'étend jamais une domination locale en globale sinon, être passée par une domination locale ne présenterait aucun intérêt. En revanche, la régularité $\mathcal{C}^1$ est une propriété locale qui s'étend globalement.

3. Il faut citer les hypothèses du théorème de changement de variables pour des intégrales généralisées si celui-ci n'est pas : affine, puissance, exponentielle, logarithme. On rappelle que le théorème s'applique sur des intervalles ouverts (quitte à ouvrir artificiellement les bornes). Pour évoquer la bijectivité du changement de variables, il faut préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Il faut ensuite décomposer en éléments simples une fraction et le plus adapté est de passer par l'étape intermédiaire de décomposition de

$$\frac{(x+1)v + (x-1)}{((x+1)v + (x-1)^2)(1+v)}$$

puis de poser $v = u^2$. Enfin, il faut faire attention au signe de $\frac{x+1}{x-1} < 0$.

4. Les arguments de la première question se transposaient à l'identique.

5. La démarche la plus efficace est l'examen de $F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in]-1; 0[$ puisque $\frac{1}{x}$ parcourt $] -\infty; -1[$ puis $x \in]0; 1[$ avec $\frac{1}{x}$ qui parcourt $]1; +\infty[$. Celle-ci évite notamment de réécrire une dérivation sous l'intégrale sur les intervalles $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$. Toutefois, cette approche était possible mais il fallait un effort additionnel pour déterminer les constantes d'intégration, une par intervalle, qu'on pouvait trouver par exemple avec une étude asymptotique.

Problème II

 Il faut préciser la continuité par morceaux de l'intégrande sur l'intervalle considéré. Pour l'utilisation d'un critère des équivalents en vue de conclure à une divergence d'intégrale, il est impératif de mentionner le signe constant de l'intégrande. Pour conclure à une convergence, on peut au choix mentionner le signe constant ou évoquer l'intégrabilité.

1. Pas de difficulté hormis l'oubli trop fréquent de la continuité par morceaux de l'intégrande.
2. Si $x < 0$, l'intégrande n'est tout simplement pas continu par morceaux sur $]0; +\infty[$. Les cas $x = 0$ et $x > 0$ méritent d'être un peu détaillés.
3. Bien fait dans l'ensemble. Une domination locale est requise. Attention à bien observer que $x + u < 1$ est possible pour $x > 0$ et $u > 0$, ce qui implique $\frac{1}{x + u} > 1$.
4. Question très technique : une intégration par partie semble indispensable pour aboutir au résultat. Question bien traitée dans quelques copies. Ne pas omettre de mentionner la linéarité de l'intégrale en cas de convergence.
5. Pour utiliser le fait que $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est une primitive de l'intégrande, il faut justifier la continuité de l'intégrande et son intégrabilité par exemple sur $]0; 1]$. Il ne s'agit pas du cadre usuel du théorème fondamental d'analyse mais de sa déclinaison pour des intégrales généralisées.
6. Question difficile, abordée avec succès par quelques uns. L'utilisation du théorème de convergence dominée doit systématiquement être détaillée.